Journal of Algebra 347 (2011) 96–132

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Journal of Algebra

www.elsevier.com/locate/jalgebra

Une formule pour le groupe de Brauer algébrique d'un torseur

Cyril Demarche

Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 12 avril 2011
Disponible sur Internet le 13 septembre 2011
Communiqué par Laurent Moret-Bailly

MSC:
14M17
14F22
20G15
18E30

Keywords:
Brauer group
Homogeneous space
Torsors

ABSTRACT

Given a homogeneous space X of a connected algebraic group G (with connected stabilizers) over a field k of characteristic zero, we construct a complex of Galois modules of length 3 and a canonical isomorphism between a hypercohomology group of this complex and an explicit subgroup of the Brauer group of X. This result is obtained as a consequence of a formula describing the "algebraic Brauer group of a torsor", and it generalizes recent results by Borovoi and van Hamel, by considering non-linear groups G and by taking into account some transcendental elements in the Brauer group of X.

Introduction

L'objectif principal de cet article est de comprendre le groupe de Brauer (ou au moins une partie de celui-ci) d'un espace homogène d'un groupe algébrique connexe à stabilisateurs connexes et d'en obtenir une description explicite. L'un des intérêts de la formule démontrée ici réside dans le fait qu'elle prenne en compte une partie des éléments transcendants du groupe de Brauer, et pas seulement le groupe de Brauer algébrique.

Précisons quelques notations : k est un corps de caractéristique nulle, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, Γ_k le groupe de Galois absolu de k, G un k-groupe algébrique connexe (pas forcément linéaire) et X un espace homogène de G, à stabilisateurs géométriques connexes. On note $\overline{H}$ le stabilisateur (défini sur $\bar{k}$ a priori) d'un point fermé $\bar{x} \in X(\bar{k})$. Remarquons qu'un tel point $\bar{x}$ définit un morphisme

Adresse e-mail : demarche@math.jussieu.fr.

0021-8693/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jalgebra.2011.09.003

de $\bar{k}$-variétés $\pi : \overline{G} \to \overline{X}$ (où $\overline{X}$ désigne la $\bar{k}$-variété $X \times_k \bar{k}$). On définit alors $\mathrm{Br}_1(X, G)$ comme le noyau de l'application composée :

$$\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X}) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Br}(\overline{G}).$$

Il est clair que le groupe $\mathrm{Br}_1(X, G)$ contient le groupe de Brauer algébrique $\mathrm{Br}_1(X) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X}))$, et il peut être strictement plus gros. On notera aussi $\mathrm{Br}_a(X, G) := \mathrm{Br}_1(X, G)/\mathrm{Br}(k)$.

Par le théorème de Chevalley (voir [10] et [27, théorème 16] ; voir également [14] pour une preuve « moderne »), le groupe G est extension d'une variété abélienne par un groupe linéaire connexe

$$1 \to G^{\mathrm{lin}} \to G \to G^{\mathrm{ab}} \to 1.$$

On note G^{red} le quotient de G^{lin} par son radical unipotent, G^{ss} le groupe dérivé de G^{red} et G^{sc} le revêtement simplement connexe de G^{ss}. Soit T_G (resp. $T_{G^{\mathrm{sc}}}$) un tore maximal de G^{lin} (resp. G^{sc}). Un résultat général sur les espaces homogènes (voir [3, proposition 3.1]) assure que, quitte à remplacer G par un groupe connexe G', on peut supposer $\overline{H}$ linéaire. Notons que les centres $Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}$ et $Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}$ des groupes $\overline{H}^{\mathrm{red}}$ et $\overline{H}^{\mathrm{sc}}$ admettent des k-formes canoniques, indépendantes de $\bar{x}$. Le module des caractères d'un groupe algébrique F/k est noté $\widehat{F} := \mathrm{Hom}_{\bar{k}-\mathrm{gr}}(\overline{F}, \mathbf{G}_{m\bar{k}})$. On est en mesure d'énoncer l'un des résultats principaux :

Théorème 0.1. *Soit X un k-espace homogène d'un groupe algébrique connexe G/k, à stabilisateur géométrique linéaire connexe $\overline{H}$.*

- *On suppose $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$. Définissons le complexe de modules galoisiens (indépendant de $\bar{x}$)*

$$\widehat{\widehat{C}}_X := [\widehat{G} \to \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}} \to \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}}],$$

  avec $\widehat{G}$ en degré 0. On a alors une suite exacte canonique

$$0 \to \mathrm{Br}_a(X, G) \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \to \mathrm{Ker}\big(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m)\big),$$

  qui induit un isomorphisme $\mathrm{Br}_a(X, G) \cong \mathbf{H}^2(k, \widehat{\widehat{C}}_X)$ si $X(k) \neq \emptyset$ ou $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$.
- *On suppose $X(k) \neq \emptyset$ (on ne suppose plus $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$). Fixons $x \in X(k)$, et notons H le stabilisateur de x dans G. Définissons*

$$\widehat{C}'_X := \big[\widehat{T_G} \to \mathrm{Pic}\big(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\big) \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \oplus \widehat{T_H} \to \widehat{T_{H^{\mathrm{sc}}}}\big],$$

  avec $\widehat{T_G}$ en degré 0. On a alors un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Br}_a(X, G) \cong \mathbf{H}^2\big(k, \widehat{C}'_X\big).$$

Remarquons d'abord que dans la seconde partie de cet énoncé, la donnée de $x \in X(k)$ définit une injection de k-groupes $H \hookrightarrow G$, de sorte que les groupes H et H^{sc}, ainsi que les tores maximaux T_H et $T_{H^{\mathrm{sc}}}$, sont définis sur k.

Remarquons également que l'hypothèse $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$ dans la première partie du théorème est vérifiée par exemple si k est un corps de nombres, un corps p-adique, ou un corps de fonctions d'une courbe sur un corps de nombres ou sur un corps p-adique. On voit aussi qu'il suffit que le morphisme $H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m)$ soit injectif pour avoir un isomorphisme, ce qui est par exemple le cas lorsque X a un zéro-cycle de degré 1.

Ce résultat s'inscrit à la suite d'un ensemble de travaux sur le groupe de Brauer des groupes algébriques et de leurs espaces homogènes. En 1981, Sansuc démontre (voir [28, lemme 6.9]) une formule décrivant le groupe $\mathrm{Br}_a(X)$ quand X est un tore ou un groupe semi-simple. Dans [6], Borovoi et van Hamel introduisent le complexe $\mathrm{UPic}(\overline{X})$ et généralisent les résultats de Sansuc dans le cas où X est un groupe linéaire connexe (voir [6, corollaire 7]), reformulant par là même un résultat de Kottwitz (voir [23, 2.4]). Puis les mêmes auteurs calculent le groupe $\mathrm{Br}_a(X)$ pour un espace homogène d'un groupe linéaire connexe : voir [5, corollaire 3.2] et [7, théorème 7.2]. Mentionnons également que Harari et Szamuely construisent dans [20, section 4], un morphisme canonique $\iota : \mathbf{H}^1(k, M^*) \to \mathrm{Br}_a(X)$ compatible avec l'obstruction de Brauer–Manin (voir [20], fin de la section 6), où X est un torseur sous une variété semi-abélienne S et M^* est le 1-motif dual de S. Enfin, on peut citer un résultat concernant le groupe de Brauer non ramifié d'un espace homogène : Colliot-Thélène et Kunyavskiĭ ont obtenu une formule décrivant le groupe de Brauer algébrique d'une compactification lisse d'un espace homogène à stabilisateurs connexes (voir [11, théorème A]).

Le théorème principal de ce texte est donc à la fois une unification et une généralisation de tous ces résultats (hormis celui concernant le groupe de Brauer non ramifié). L'intérêt principal de cette généralisation est la prise en compte de certains éléments transcendants du groupe de Brauer, contrairement aux résultats mentionnés qui se limitaient à $\mathrm{Br}_a(X)$. Outre l'intérêt théorique de décrire l'ensemble du groupe $\mathrm{Br}(X)$, l'une des motivations pour l'introduction et l'étude du groupe $\mathrm{Br}_a(X, G)$ réside dans les résultats récents obtenus par Borovoi et l'auteur dans [4] à propos du défaut d'approximation forte dans les espaces homogènes sur les corps de nombres (voir notamment le théorème 1.4 de [4]). Le groupe $\mathrm{Br}_a(X, G)$ y apparaît en effet de façon naturelle comme le sous-groupe minimal de $\mathrm{Br}(X)$ permettant de décrire l'adhérence des points rationnels dans l'ensemble des points adéliques de X, à l'aide de l'obstruction de Brauer–Manin. En effet, si le groupe de Brauer algébrique est suffisant pour l'obstruction de Brauer–Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sur X, ce n'est pas le cas pour l'obstruction à l'approximation forte et au principe de Hasse pour les points entiers, où une obstruction transcendante est en général nécessaire (voir [4, contre-exemple 1.6] et [13, remarque 2.11]). Ainsi le théorème énoncé dans cette introduction, en regard du résultat principal de [4], donne-t-il une formule explicite et calculable, en termes de l'hypercohomologie d'un complexe de modules galoisiens, pour le défaut d'approximation forte dans un espace homogène sur un corps de nombres.

Mentionnons également que l'on obtient au passage dans ce texte des résultats généraux concernant le « groupe de Brauer algébrique des torseurs » : si $\pi : Y \xrightarrow{H} X$ est un torseur sous un groupe linéaire connexe H, on donne une formule (voir section 3, théorème 3.1 et ses corollaires) décrivant le groupe $\mathrm{Br}_1(X, Y) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(\overline{Y}))$. Cette formule est une généralisation naturelle des résultats classiques de Sansuc sur le groupe de Brauer des torseurs.

1. Préliminaires sur les groupes de Picard et de Brauer des torseurs

Dans tout ce texte, sauf mention explicite du contraire, on entend par « catégorie dérivée » la catégorie dérivée associée à la catégorie des complexes bornés de modules galoisiens sur k. Dans tout le texte, étant donné un schéma X, on considère toujours le site étale sur X, les faisceaux considérés sont des faisceaux étales et la cohomologie considérée est la cohomologie étale.

Enfin, dans tout le texte (sauf mention explicite du contraire), X est une k-variété algébrique lisse et géométriquement intègre.

1.1. Un complexe associé à un morphisme

On construit ici un complexe de modules galoisiens, de longueur 3, associé à un morphisme de k-variétés algébriques $\pi : Y \to X$. Ce complexe est crucial en vue du calcul du groupe de Brauer dans la section 2.

Soit $\pi : Y \to X$ un morphisme de k-variétés algébriques lisses et géométriquement intègres. On considère la suite exacte habituelle de faisceaux (étales) sur Y (voir [18, II.1], suite exacte (2)) :

$$0 \to \mathbf{G}_{mY} \to \mathscr{K}_Y^* \to \mathscr{D}\mathrm{iv}_Y \to 0. \tag{1}$$

On applique le foncteur π_* à cette suite exacte. On obtient la suite exacte :

$$0 \to \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to \pi_* \mathscr{K}_Y^* \to \pi_* \mathscr{D}iv_Y \to R^1 \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to R^1 \pi_* \mathscr{K}_Y^*.$$

Or le théorème de Hilbert 90 assure que $R^1 \pi_* \mathscr{K}_Y^* = 0$ (voir [18, II, lemme 1.6]), et donc on a une suite exacte

$$0 \to \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to \pi_* \mathscr{K}_Y^* \to \pi_* \mathscr{D}iv_Y \to R^1 \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to 0. \tag{2}$$

Notons $\mathscr{Q}$ le conoyau du morphisme $\pi_* \mathbf{G}_{mY} \to \pi_* \mathscr{K}_Y^*$, et appliquons le foncteur p_{X*} à cette suite exacte (où $p_X : X \to \mathrm{Spec}(k)$ est le morphisme structural de X). On obtient les suites exactes suivantes (en notant que $p_Y = p_X \circ \pi$) :

$$0 \to p_{Y*} \mathbf{G}_{mY} \to p_{Y*} \mathscr{K}_Y^* \to p_{X*} \mathscr{Q} \to R^1 p_{X*} \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to R^1 p_{X*} \pi_* \mathscr{K}_Y^*,$$
$$R^1 p_{X*} \pi_* \mathscr{K}_Y^* \to R^1 p_{X*} \mathscr{Q} \to R^2 p_{X*} \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to R^2 p_{X*} \pi_* \mathscr{K}_Y^*,$$
$$0 \to p_{X*} \mathscr{Q} \to p_{Y*} \mathscr{D}iv_Y \to p_{X*} R^1 \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to R^1 p_{X*} \mathscr{Q}.$$

Or le faisceau $R^1 p_{X*} \pi_* \mathscr{K}_Y^*$ est nul car il s'injecte dans $R^1 p_{Y*} \mathscr{K}_Y^* = 0$ par un argument de suite spectrale, donc les suites précédentes se réécrivent ainsi :

$$0 \to \bar{k}[Y]^* \to \bar{k}(Y)^* \to p_{X*} \mathscr{Q} \to R^1 p_{X*} \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to 0, \tag{3}$$
$$0 \to R^1 p_{X*} \mathscr{Q} \to R^2 p_{X*} \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to R^2 p_{X*} \pi_* \mathscr{K}_Y^*, \tag{4}$$
$$0 \to p_{X*} \mathscr{Q} \to \mathrm{Div}(\overline{Y}) \to p_{X*} R^1 \pi_* \mathbf{G}_{mY} \to R^1 p_{X*} \mathscr{Q}. \tag{5}$$

Ces suites exactes permettent de définir le complexe suivant (où $\bar{k}(Y)^*/\bar{k}^*$ est en degré 0)

$$\mathrm{UPic}(\pi : Y \to X) := \left[\bar{k}(Y)^*/\bar{k}^* \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Div}(\overline{Y}) \xrightarrow{\partial} H^0\left(\overline{X}, R^1 \pi_* \mathbf{G}_{mY}\right)\right],$$

où le morphisme Δ est le morphisme $f \mapsto \mathrm{div}(f)$, égal à la composée des morphismes suivants apparaissant dans les suites exactes (3) et (5) : $\bar{k}(Y)^* \to p_{X*} \mathscr{Q} \to \mathrm{Div}(\overline{Y})$; le morphisme ∂ apparaît dans la suite exacte (5). Notons enfin que le groupe $H^0(\overline{X}, R^1 \pi_* \mathbf{G}_{mY})$ est appelé le groupe de Picard relatif de $\overline{Y}$ sur $\overline{X}$, noté $\mathrm{Pic}'(\overline{Y}/\overline{X})$ (voir [8, chapitre 8] : le groupe $\mathrm{Pic}'(\overline{Y}/\overline{X})$ est le groupe des sections globales sur $\overline{X}$ du foncteur de Picard relatif $\mathrm{Pic}_{\overline{Y}/\overline{X}}$).

Le lemme suivant est alors évident (on rappelle que $\mathrm{UPic}(\overline{Y})$ est représenté par le complexe $[\bar{k}(Y)^*/\bar{k} \to \mathrm{Div}(\overline{Y})]$: voir [6, corollaire 2.5]) :

Lemme 1.1. *On a un triangle exact canonique dans la catégorie dérivée des modules galoisiens* :

$$\mathrm{Pic}'(\overline{Y}/\overline{X})[-2] \to \mathrm{UPic}(\pi : Y \to X) \to \mathrm{UPic}(\overline{Y}) \to \mathrm{Pic}'(\overline{Y}/\overline{X})[-1].$$

1.2. Application au cas des torseurs

Par convention, et sauf mention explicite du contraire, les torseurs considérés sont des *torseurs à droite*.

Soit k un corps de caractéristique nulle, X une k-variété lisse et géométriquement intègre. Soit $\overline{H}$ un $\bar{k}$-groupe algébrique linéaire connexe et $\overline{\pi} : \overline{Y} \xrightarrow{\overline{H}} \overline{X}$ un $\overline{X}$-torseur sous $\overline{H}$.

On rappelle ici la définition d'une donnée de recollement sur un tel torseur (voir par exemple [19, définition 2.1], où cette notion est appelée « donnée de descente »). On renvoie à [19] pour les notations :

Définition 1.2. Une donnée de recollement sur $\overline{Y}/X$ est la donnée d'un sous-groupe topologique E de $\mathrm{SAut}(\overline{Y}/X)$ s'intégrant dans un diagramme commutatif exact de groupes topologiques

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \overline{H}(\bar{k}) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & E \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_k \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\overline{Y}/\overline{X}) \arrow[r] & \mathrm{SAut}(\overline{Y}/X) \arrow[r] & \Gamma_k &
\end{tikzcd}$$

où la ligne supérieure est localement scindée et le morphisme i est le morphisme naturel.

Désormais, *on suppose que $\overline{Y}/X$ est muni d'une donnée de recollement.*

Dans cette section, on associe à la donnée du torseur $\overline{Y}/X$, muni de sa donnée de recollement, un complexe de modules galoisiens noté $C_{\overline{Y}/X}$, que l'on relie à un complexe de la forme $\mathrm{UPic}(\pi : Z \to X)$, où Z/X est un torseur (défini sur k) associé à $\overline{Y}/X$.

Notons $\overline{H}^{\mathrm{u}}$ le radical unipotent de $\overline{H}$, et $\overline{H}^{\mathrm{red}} := \overline{H}/\overline{H}^{\mathrm{u}}$. Définissons le groupe $\overline{H'} := \overline{H}^{\mathrm{red}}/Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}$ et les quotients $\overline{Z'} := \overline{Y}/\overline{H}^{\mathrm{u}}$ et $\overline{Z} := \overline{Z'}/Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}$, de sorte que l'on ait un diagramme commutatif de torseurs sur $\overline{X}$:

$$\begin{tikzcd}
\overline{Y} \arrow[r, "\overline{H}^{\mathrm{u}}"] \arrow[ddr, "\overline{H}"'] & \overline{Z'} \arrow[dr, "Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}"] \arrow[dd, "\overline{H}^{\mathrm{red}}"] & \\
& & \overline{Z} \arrow[dl, "\overline{H'}"] \\
& \overline{X} &
\end{tikzcd}.$$

Remarquons au passage que les quotients $\overline{Z'}$ et $\overline{Z}$ sont représentables par des $\bar{k}$-variétés (voir par exemple [24, théorème III.4.3.(a)]).

Suivant [19, proposition 2.2], on peut associer à une telle donnée de recollement un k-lien $L_{\overline{Y}/X}$ sur le groupe $\overline{H}$, ainsi qu'une classe $\eta_{\overline{Y}/X} \in H^2(k, L_{\overline{Y}/X})$, qui est l'obstruction à descendre le torseur $\overline{Y} \to \overline{X}$ en un torseur sur X : cette classe est neutre si et seulement si le torseur $\overline{Y}/\overline{X}$ descend sur X.

Le sous-groupe $\overline{H}^{\mathrm{u}}$ de $\overline{H}$ est invariant par les semi-automorphismes de $\overline{H}$, donc le lien $L_{\overline{Y}/X}$ induit un lien $L_{\overline{Z'}/X}$ sur $\overline{H}^{\mathrm{red}}$. De même, $L_{\overline{Z'}/X}$ induit un lien $L_{\overline{Z}/X}$ sur $\overline{H'}$. Or $\overline{H'}$ est réductif et de centre trivial, donc par la proposition 1.1 de [15] ou la proposition 3.1 de [1], l'ensemble $H^2(k, L_{\overline{Z}/X})$ est réduit à un seul élément, qui est une classe neutre. Donc l'image $\eta'_{\overline{Y}/X} \in H^2(k, L_{\overline{Z}/X})$ de la classe $\eta_{\overline{Y}/X} \in H^2(k, L_{\overline{Y}/X})$ est neutre.

Or par fonctorialité, la classe $\eta'_{\overline{Y}/X}$ coïncide avec la classe associée à la donnée de recollement induite sur $\overline{Z} \to \overline{X}$. Par conséquent, puisque $\eta'_{\overline{Y}/X}$ est neutre, il existe une k-forme H' de $\overline{H'}$ et un torseur $p : Z \xrightarrow{H'} X$ qui devient isomorphe à $\overline{p} : \overline{Z} \xrightarrow{\overline{H'}} \overline{X}$ quand on étend les scalaires à $\bar{k}$.

Remarque 1.3. Cette k-forme Z/X est définie à torsion près par un cocycle dans $Z^1(k, H')$. Or le groupe $\overline{H'}$ admet une unique k-forme intérieure quasi-déployée, donc dans la suite et sauf mention explicite du contraire, on considère la k-forme $p : Z \to X$ (unique à isomorphisme près) correspondant à cette k-forme quasi-déployée de $\overline{H'}$. Notons toutefois que les arguments qui suivent restent valables pour toute autre k-forme Z/X.

Grâce au lemme 5.2.(ii) de [6], on dispose d'un morphisme canonique $\varphi : \mathrm{UPic}(\overline{Z}) \to \mathrm{UPic}(\overline{H'})$. Ce morphisme est représentable par le morphisme de complexes horizontaux :

$$\begin{tikzcd} \bar{k}(Z)^*/\bar{k}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Div}(\overline{Z}) \arrow[d, "\varphi'"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{H'}), \end{tikzcd}$$

via le quasi-isomorphisme $\mathrm{UPic}(\overline{H'}) \to \mathrm{Pic}(\overline{H'})[-1]$, où φ' est la composée

$$\mathrm{Div}(\overline{Z}) \to \mathrm{Pic}(\overline{Z}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Pic}\big(\overline{H'}\big).$$

Définissons l'objet $C_{\overline{Y}/X}$ comme le complexe de modules galoisiens

$$C_{\overline{Y}/X} := \big[\bar{k}(Z)^*/\bar{k}^* \to \mathrm{Div}(\overline{Z}) \xrightarrow{\varphi'} \mathrm{Pic}\big(\overline{H'}\big)\big],$$

où $\bar{k}(Z)^*/\bar{k}^*$ est en degré 0 et $\mathrm{Pic}(\overline{H'})$ en degré 2. Par construction, $C_{\overline{Y}/X}[1]$ est un cône du morphisme $\varphi : \mathrm{UPic}(\overline{Z}) \to \mathrm{UPic}(\overline{H'})$ dans la catégorie dérivée : on a un triangle exact

$$C_{\overline{Y}/X} \to \mathrm{UPic}(\overline{Z}) \to \mathrm{UPic}\big(\overline{H'}\big) \to C_{\overline{Y}/X}[1].$$

On souhaite maintenant définir un morphisme naturel $C_{\overline{Y}/X} \to \mathrm{UPic}(\pi : Z \to X)$.

1.2.1. Construction générale

Soit $f : V \xrightarrow{G} X$ un X-torseur sous un k-groupe linéaire connexe G. Construisons un morphisme canonique

$$s_{V/X} : \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}'(V/X).$$

Soit une classe $p \in \mathrm{Pic}(G)$ représentée par un torseur $f : P \to G$ sous $\mathbf{G}_m$. Par définition, on a un isomorphisme naturel de la forme $\phi : V \times G \to V \times_X V$. On définit alors W comme le pull-back (« tiré en arrière ») du torseur $f_V : V \times P \to V \times G$ sous $\mathbf{G}_m$ (déduit de $P \to G$ par changement de base par la projection $V \times G \to G$) par le morphisme $\phi^{-1} : V \times_X V \to V \times G$. On obtient ainsi un torseur $W \to V \times_X V$ sous $\mathbf{G}_m$, qui définit bien une classe dans $\mathrm{Pic}'(V/X)$ (voir [8, p. 202] pour une description explicite des éléments de $\mathrm{Pic}'(V/X)$). On note alors par définition $s_{V/X}(p)$ la classe de $W \to V \times_X V$ dans $\mathrm{Pic}'(V/X)$, et on vérifie que cette classe ne dépend pas du représentant P de p choisi.

Le morphisme $s_{V/X}$ induit ainsi un diagramme canonique

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(V) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}(G) \arrow[d, "s_{V/X}"] \\ \mathrm{Pic}(V) \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{Pic}'(V/X). \end{tikzcd} \tag{6}$$

Lemme 1.4. *Le diagramme* (6) *est commutatif.*

Démonstration. On commence par rappeler la définition de φ. Si $m : V \times G \to V$ désigne l'action de G, alors φ est la composée des morphismes :

$$\mathrm{Pic}(V) \xrightarrow{m^*} \mathrm{Pic}(V \times G) \xleftarrow{\cong} \mathrm{Pic}(V) \oplus \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G)$$

(voir [28, lemme 6.6] pour l'isomorphisme central). Soit $f : Z \to V$ un torseur sous $\mathbf{G}_m$ de classe $p \in \mathrm{Pic}(V)$. Par définition de φ, il existe un torseur $W \to G$ sous $\mathbf{G}_m$ (de classe $[W] = \varphi(p)$ dans $\mathrm{Pic}(G)$) et un isomorphisme de $V \times G$-torseurs sous $\mathbf{G}_m$ entre $Z' := m^*Z$ et le quotient de $Z \times W$ par l'action diagonale de $\mathbf{G}_m$. Par conséquent, $s_{V/X}(\varphi(p)) \in \mathrm{Pic}'(V/X)$ est représenté par le torseur $U \xrightarrow{\mathbf{G}_m} V \times_X V$ déduit de $V \times W \to V \times G$ via l'isomorphisme $V \times G \cong V \times_X V$. Quant à la classe $\partial(p)$, elle est représentée par le torseur $Z \xrightarrow{\mathbf{G}_m} V$.

On cherche donc à montrer que les classes des torseurs $Z \xrightarrow{\mathbf{G}_m} V$ et $U \xrightarrow{\mathbf{G}_m} V \times_X V$ coïncident dans $\mathrm{Pic}'(V/X)$. Pour cela, il suffit de montrer que dans les diagrammes de carrés cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd}
Z'' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
Z \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & V \arrow[r] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U' \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[d] & \\
Z \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & V \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

les $Z \times_X V$-torseurs Z'' et U' sont isomorphes. Il suffit donc de montrer que $[Z''] = [U'] \in \mathrm{Pic}(Z \times_X V)$. Pour cela, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(V \times_X V) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(V \times G) \arrow[d] & \mathrm{Pic}(V) \oplus \mathrm{Pic}(G) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Pic}(Z \times_X V) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Pic}(Z \times G) & \mathrm{Pic}(Z) \oplus \mathrm{Pic}(G). \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Par construction, la classe $[Z'] \in \mathrm{Pic}(V \times G)$ correspond au couple $([Z], [W]) \in \mathrm{Pic}(V) \oplus \mathrm{Pic}(G)$. Donc, par fonctorialité, son image $[Z'']$ dans $\mathrm{Pic}(Z \times G)$ correspond au couple $(0, [W]) \in \mathrm{Pic}(Z) \oplus \mathrm{Pic}(G)$ (on rappelle que le pull-back du torseur $Z \to V$ par le morphisme $Z \to V$ lui-même est trivial comme Z-torseur).

La classe $[U] \in \mathrm{Pic}(V \times_X V)$ correspond par construction à la classe $[V \times W] \in \mathrm{Pic}(V \times G)$, qui elle-même correspond au couple $(0, [W]) \in \mathrm{Pic}(V) \oplus \mathrm{Pic}(G)$. On en déduit donc que la classe $[U'] \in \mathrm{Pic}(Z \times_X V)$ correspond au couple $(0, [W]) \in \mathrm{Pic}(Z) \oplus \mathrm{Pic}(G)$.

Par conséquent, on a $[Z''] = [U'] \in \mathrm{Pic}(Z \times_X V)$, i.e. $s_{V/X}(\varphi(p)) = \partial(p)$. $\square$

On déduit immédiatement du lemme 1.4 la construction suivante :

Lemme 1.5. *Soit $f : V \xrightarrow{G} X$ un torseur sous un groupe linéaire connexe G tel que $G^{\mathrm{tor}} = 0$. Alors le morphisme $s_{\overline{V}/\overline{X}} : \mathrm{Pic}(\overline{G}) \to \mathrm{Pic}'(\overline{V}/\overline{X})$ induit un morphisme naturel de complexes :*

$$C_{\overline{V}/X} \to \mathrm{UPic}(f : V \to X).$$

Proposition 1.6. *Soit $f : V \xrightarrow{G} X$ un torseur sous un groupe linéaire connexe G. Supposons que $G^{\mathrm{tor}} = 0$ (i.e. $\widehat{G} = 0$). Alors le morphisme naturel*

$$\mathbf{G}_{mX} \xrightarrow{\cong} f_*\mathbf{G}_{mV}$$

est un isomorphisme, et le morphisme canonique

$$C_{\overline{V}/X} \to \mathrm{UPic}(f : V \to X)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. Pour le premier point, il suffit d'étendre la proposition 14.2 de [12] (lemme de Rosenlicht global) aux torseurs sous des groupes connexes :

Proposition 1.7. *Soit X un schéma réduit et G/X un schéma en groupes plat localement de présentation finie, à fibres maximales lisses connexes. Soit $f : V \xrightarrow{G} X$ un torseur sous G. On a une suite exacte de faisceaux étales :*

$$1 \to \mathbf{G}_{mX} \to f_*\mathbf{G}_{mV} \to \widehat{G} \to 1$$

où $\widehat{G} := \mathscr{H}om_{X-\mathrm{gr}}(G, \mathbf{G}_{mX})$.

Démonstration. La preuve est exactement similaire à celle la proposition 1.4.2 de [12], en utilisant le corollaire VII.1.2 de [26]. $\square$

Cette proposition implique le premier point de la proposition 1.6.

Montrons le second point : il suffit de montrer que le morphisme naturel $s_{\overline{V}/\overline{X}} : \mathrm{Pic}(\overline{G}) \to \mathrm{Pic}'(\overline{V}/\overline{X})$ est un isomorphisme. On commence par le résultat suivant :

Proposition 1.8. *Soit k un corps de caractéristique nulle, X une k-variété lisse géométriquement intègre. Soit $f : V \to X$ un torseur sous un k-groupe linéaire connexe G. On a un diagramme commutatif naturel de suites exactes :*

$$\begin{tikzcd}
k[G]^*/k^* \arrow[r, "\Delta'_{V/X}"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "t_{V/X}"] & \mathrm{Pic}(V) \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}(G) \arrow[r, "\Delta_{V/X}"] \arrow[d, "s_{V/X}"] & \mathrm{Br}(X) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "r_{V/X}"] & \mathrm{Br}(V) \arrow[d, "="] \\
0 \arrow[r] & H^1(X, f_*\mathbf{G}_{mV}) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Pic}(V) \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Pic}'(V/X) \arrow[r, "\delta_{V/X}"] & H^2(X, f_*\mathbf{G}_{mV}) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Br}(V),
\end{tikzcd}$$

où la suite supérieure provient de [4, *théorème* 2.8], *et la suite inférieure provient de la suite spectrale de Leray $E_2^{p,q} = H^p(X, R^q f_*\mathbf{G}_{mV}) \Rightarrow H^{p+q}(V, \mathbf{G}_{mV})$.*

Démonstration. Les morphismes $t_{V/X}$ et $r_{V/X}$ sont induits par le morphisme canonique $\mathbf{G}_{mX} \to f_*\mathbf{G}_{mV}$, et le morphisme $s_{V/X}$ est défini au début de la section 1.2.1.

Montrons la commutativité du diagramme ainsi construit.

- Commutativité du premier carré : il suffit de montrer que la composée

$$k[G]^*/k^* \xrightarrow{\Delta'_{V/X}} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{t_{V/X}} H^1(X, f_*\mathbf{G}_{mV})$$

est le morphisme nul. Ceci est une conséquence de la commutativité du deuxième carré et de l'exactitude de la ligne inférieure du diagramme.

- Commutativité du deuxième carré : c'est un calcul classique, voir par exemple [17, proposition 3.1.3 et 3.1.4.1].
- Commutativité du troisième carré : c'est le lemme 1.4.
- Commutativité du quatrième carré : c'est une conséquence de la proposition V.3.2.9 de [17] et de sa preuve, en utilisant la définition de $\Delta_{V/X}$ (voir [13, section 2, p. 314] ou [4, 2.5]).
- Commutativité du dernier carré : la preuve est similaire à celle du deuxième carré. □

On déduit de cette proposition le corollaire suivant :

Corollaire 1.9. *Sous les hypothèses de la proposition* 1.8*, si on suppose de plus que* $\widehat{G}(k) = k[G]^*/k^*$ *est trivial* (*i.e.* $G^{\mathrm{tor}} = 0$)*, alors* $f_* \mathbf{G}_{mV} = \mathbf{G}_{mX}$ *et le diagramme de la proposition* 1.8 *devient :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(X) \arrow[r, hook, "f^*"] \arrow[d, "t_{V/X}", "\cong"'] & \mathrm{Pic}(V) \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}(G) \arrow[r, "\Delta_{V/X}"] \arrow[d, "s_{V/X}", "\cong"'] & \mathrm{Br}(X) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "r_{V/X}", "\cong"'] & \mathrm{Br}(V) \arrow[d, "="] \\
H^1(X, f_*\mathbf{G}_{mV}) \arrow[r, hook, "\varphi"] & \mathrm{Pic}(V) \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{Pic}'(V/X) \arrow[r, "\delta_{V/X}"] & H^2(X, f_*\mathbf{G}_{mV}) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Br}(V).
\end{tikzcd}$$

Revenons à la preuve de la proposition 1.6 : le corollaire 1.9 assure que le morphisme $s_{\overline{V}/\overline{X}} : \mathrm{Pic}(\overline{G}) \to \mathrm{Pic}'(\overline{V}/\overline{X})$ est un isomorphisme, ce qui conclut la preuve. □

1.2.2. Cas d'un torseur avec donnée de recollement

Revenons à la situation et aux notations introduites au début de la section 1.2.

On applique la proposition 1.6 au torseur $p : Z \xrightarrow{H'} X$. Les hypothèses de cette proposition sont vérifiées, puisque $H'^{\mathrm{tor}} = 0$. Par conséquent, on a l'énoncé suivant :

Proposition 1.10. *Soit* $\overline{Y}/X$ *un torseur sous* $\overline{H}$ *linéaire connexe, muni d'une donnée de recollement. On conserve les notations de la section* 1.2*. Alors on a un quasi-isomorphisme*

$$C_{\overline{Y}/X} = C_{\overline{Z}/X} \to \mathrm{UPic}(p : Z \to X),$$

et un isomorphisme

$$\mathbf{G}_{mX} \cong p_* \mathbf{G}_{mZ}.$$

2. Groupe de Brauer d'un torseur avec donnée de recollement

Dans cette section, le cadre est le même que dans la précédente : k est un corps de caractéristique nulle, X est une k-variété lisse géométriquement intègre, et $\overline{H}$ est un $\bar{k}$-groupe algébrique. Soit $\overline{\pi} : \overline{Y} \xrightarrow{\overline{H}} \overline{X}$ un $\overline{X}$-torseur sous $\overline{H}$ muni d'une donnée de recollement. On définit le groupe

$$\mathrm{Br}_1(X, \overline{Y}) := \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X}) \xrightarrow{\overline{\pi}^*} \mathrm{Br}(\overline{Y})\big)$$

comme dans [4], et $\mathrm{Br}_a(X, \overline{Y}) := \mathrm{Br}_1(X, \overline{Y})/\mathrm{Br}(k)$. On l'appelle groupe de Brauer algébrique du « torseur » $\overline{Y}/X$. Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.1. *Avec les notations précédentes, on dispose d'un isomorphisme canonique, fonctoriel en* $(X, \overline{Y}, \overline{H}, \overline{\pi})$:

$$U(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{Y}/X}),$$

et d'une suite exacte de groupes commutatifs, fonctorielle en $(X, \overline{Y}, \overline{H}, \overline{\pi})$:

$$0 \to \operatorname{Pic}(X) \to \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}) \to \operatorname{Br}(k) \to \operatorname{Br}_1(X, \overline{Y}) \to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}) \to N^3(k, \mathbf{G}_m),$$

où $N^3(k, \mathbf{G}_m) := \operatorname{Ker}(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m))$.

Avant de commencer la preuve, rappelons la suite exacte (2) dans le contexte du morphisme $p : Z \to X$ induit par la donnée de recollement :

$$0 \to \mathbf{G}_{mX} \to p_*\mathscr{K}_Z^* \to p_*\mathscr{D}iv_Z \to R^1 p_*\mathbf{G}_{mZ} \to 0, \tag{7}$$

et définissons le morphisme $\partial_2 : p_{X*}R^1 p_*\mathbf{G}_{mZ} \to R^2 p_{X*}\mathbf{G}_{mX}$ comme le cobord itéré associé au foncteur p_{X*} et à cette suite exacte (rappelons que la proposition 1.6 permet d'identifier $\mathbf{G}_{mX} = p_*\mathbf{G}_{mZ}$).

Démonstration. Définissons $\operatorname{UPic}'(p : Z \to X) := [\bar{k}(Z)^* \to \operatorname{Div}(\overline{Z}) \xrightarrow{\varphi'} \operatorname{Pic}'(\overline{Z}/\overline{X})]$. On rappelle que la notation $\tau_{\leqslant n}$ désigne le foncteur de troncation en degrés inférieurs à n.

Proposition 2.2. *Il existe un triangle exact naturel*

$$\operatorname{UPic}'(p) \to \tau_{\leqslant 2}\mathbf{R}p_{X*}\mathbf{G}_{mX} \to \big(R^2 p_{X*}\mathbf{G}_{mX}/\partial_2\big(p_{X*}R^1 p_*\mathbf{G}_{mZ}\big)\big)[-2] \to \operatorname{UPic}'(p)[1],$$

et une suite exacte canonique

$$0 \to \partial_2\big(p_{X*}R^1 p_*\mathbf{G}_{mZ}\big) \to R^2 p_{X*}\mathbf{G}_{mX} \to R^2 p_{Z*}\mathbf{G}_{mZ}.$$

Démonstration. On montre en fait le résultat plus général suivant :

Lemme 2.3. *Soient* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ *deux catégories abéliennes, et* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ *un foncteur exact à gauche. Soit*

$$0 \to A \to B_0 \to B_1 \to \cdots \to B_n \to 0 \tag{8}$$

une suite exacte dans $\mathscr{A}$. *On suppose que* $\mathscr{A}$ *a suffisamment d'injectifs et que* $(R^i F)B_k = 0$ *pour tout* $0 \leqslant k \leqslant n-2$ *et tout* $1 \leqslant i \leqslant n-1-k$. *Alors on a un triangle exact canonique (dans la catégorie dérivée associée à la catégorie des complexes bornés de* $\mathscr{A}$) :

$$R^0 F[B_0 \to \cdots \to B_n] \to \tau_{\leqslant n}(\mathbf{R}F)A \to \big(\big(R^n F\big)A/\partial_n(B_n)\big)[-n] \to R^0 F[B_0 \to \cdots \to B_n][1],$$

où $\partial_n : B_n \to (R^n F)A$ *est le cobord itéré associé à la suite exacte* (8). *Supposons en outre que* $(R^{n-1}F)B_1 = (R^{n-2}F)B_2 = \cdots = (R^1 F)B_{n-1} = 0$, *alors on a une suite exacte canonique*

$$0 \to \partial_n(B_n) \to \big(R^n F\big)A \to \big(R^n F\big)B_0.$$

Démonstration. On note $B_\bullet$ le complexe

$$B_\bullet := [B_0 \to B_1 \to \cdots \to B_n].$$

Soit $B_\bullet \xrightarrow{\epsilon_\bullet} I_{\bullet,\bullet}$ une résolution injective de Cartan-Eilenberg de $B_\bullet$ (voir [29, 5.7.9]). Considérons le complexe total $\mathrm{Tot}(F(I_{\bullet,\bullet}))$ associé au complexe double $F(I_{\bullet,\bullet})$. On a un morphisme injectif naturel de complexes de longueur $n+1$

$$F(\epsilon_\bullet) : F(B_\bullet) \to \tau_{\leqslant n} \mathrm{Tot}\big(F(I_{\bullet,\bullet})\big).$$

Montrons que son conoyau $Q_\bullet$ est quasi-isomorphe à $(\mathscr{H}^n(\mathrm{Tot}(F(I_{\bullet,\bullet})))/\epsilon_n(B_n))[-n]$. Par définition, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$Q_k = F(I_{0,k}) \oplus \cdots \oplus F(I_{k-1,1}) \oplus \big(F(I_{k,0})/\epsilon_k\big(F(B_k)\big)\big).$$

Fixons $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Puisque $(R^k F)B_0 = (R^{k-1}F)B_1 = \cdots = (R^1 F)B_{k-1} = 0$, une chasse au diagramme simple dans $F(I_{\bullet,\bullet})$ assure que $Q_\bullet$ est exact en degré k. Par conséquent, on a un quasi-isomorphisme canonique

$$Q_\bullet \to \mathscr{H}^n(Q_\bullet)[-n] = (Q_n/Q_{n-1})[-n].$$

Or Q_n est le quotient du noyau de

$$F(I_{0,n}) \oplus \cdots \oplus F(I_{n,0}) \to F(I_{0,n+1}) \oplus \cdots \oplus F(I_{n+1,0})$$

par $\epsilon_n(B_n) \subset F(I_{n,0})$, donc

$$Q_n/Q_{n-1} = \mathscr{H}^n\big(\mathrm{Tot}\big(F(I_{\bullet,\bullet})\big)\big)/\epsilon_n(B_n).$$

Finalement, la suite exacte de complexes

$$0 \to F(B_\bullet) \xrightarrow{\epsilon_\bullet} \tau_{\leqslant n}\mathrm{Tot}\big(F(I_{\bullet,\bullet})\big) \to Q_\bullet \to 0$$

induit un triangle exact canonique (qui ne dépend pas de la résolution $I_{\bullet,\bullet}$ choisie) dans la catégorie dérivée

$$F(B_\bullet) \to \tau_{\leqslant n}(\mathbf{R}F)B_\bullet \to \big(\big(R^n F\big)B_\bullet/\epsilon_n(B_n)\big)[-n] \to F(B_\bullet)[1]. \tag{9}$$

Enfin la suite exacte (8) induit un isomorphisme naturel dans la catégorie dérivée $A \cong B_\bullet$ qui permet d'identifier le triangle exact (9) au triangle exact du lemme (après avoir identifié $\epsilon_n(B_n) \subset (R^n F)B_\bullet$ avec $\partial_n(B_n) \subset (R^n F)A$, en s'inspirant de [9, proposition 7.1]).

Enfin, la dernière partie du lemme s'obtient en décomposant la suite (8) en suites exactes courtes et en écrivant les suites exactes longues associées. □

Appliquons le lemme 2.3 à la situation considérée dans la proposition 2.2 et à la suite exacte (7) dans la catégorie $\mathscr{A}$ des faisceaux abéliens étales sur X, $\mathscr{B}$ étant la catégorie des faisceaux abéliens étales sur $\mathrm{Spec}(k)$ et le foncteur F étant l'image directe $(p_X)_*$ par le morphisme structural $p_X : X \to \mathrm{Spec}(k)$. Il faut vérifier les hypothèses suivantes pour appliquer le lemme : $(R^1 p_{X*})p_*\mathscr{K}_Z^* = 0$ et $(R^1 p_{X*})p_*\mathscr{D}iv_Z = 0$. La première annulation est une conséquence de Hilbert 90, puisque $(R^1 p_{X*})p_*\mathscr{K}_Z^*$ s'injecte dans $(R^1 p_{Z*})\mathscr{K}_Z^*$, qui est nul par Hilbert 90 (voir [18, II, lemme 1.6]). La seconde annulation provient de l'injection naturelle $(R^1 p_{X*}) p_* \mathscr{D}iv_Z \to (R^1 p_{Z*}) \mathscr{D}iv_Z = 0$ (Z est lisse, donc le faisceau $\mathscr{D}iv_Z$ s'identifie au faisceau des diviseurs de Weil : voir [18, II]).

Ainsi le lemme 2.3 fournit-il un triangle exact dans la catégorie dérivée

$$\begin{aligned} &R^0 p_{X*}\big[p_* \mathscr{K}_Z^* \to p_* \mathscr{D}iv_Z \to R^1 p_* \mathbf{G}_{mZ}\big] \to \tau_{\leqslant 2} \mathbf{R} p_{X*} \mathbf{G}_{mX} \\ &\quad \to \big(R^2 p_{X*} \mathbf{G}_{mX} / \partial_2\big(p_{X*} R^1 p_* \mathbf{G}_{mZ}\big)\big)[-2] \to R^0 p_{X*}\big[p_* \mathscr{K}_Z^* \to p_* \mathscr{D}iv_Z \to R^1 p_* \mathbf{G}_{mZ}\big][1], \end{aligned}$$

et une suite exacte

$$0 \to \partial_2\big(p_{X*} R^1 p_* \mathbf{G}_{mZ}\big) \to R^2 p_{X*} \mathbf{G}_{mX} \to R^2 p_{X*} p_* \mathscr{K}_Z^*. \tag{10}$$

Or $R^0 p_{X*}[p_* \mathscr{K}_Z^* \to p_* \mathscr{D}iv_Z \to R^1 p_* \mathbf{G}_{mZ}] = \mathrm{UPic}'(p : Z \to X)$, donc le triangle exact devient

$$\mathrm{UPic}'(p) \to \tau_{\leqslant 2} \mathbf{R} p_{X*} \mathbf{G}_{mX} \to \big(R^2 p_{X*} \mathbf{G}_{mX} / \partial_2\big(p_{X*} R^1 p_* \mathbf{G}_{mZ}\big)\big)[-2] \to \mathrm{UPic}'(p)[1]. \tag{11}$$

On considère alors le diagramme commutatif naturel suivant :

$$\begin{tikzcd} (R^2 p_{X*}) p_* \mathbf{G}_{mZ} \arrow[r] \arrow[d] & (R^2 p_{X*}) p_* \mathscr{K}_Z^* \arrow[d] \\ (R^2 p_{Z*}) \mathbf{G}_{mZ} \arrow[r] & (R^2 p_{Z*}) \mathscr{K}_Z^*, \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales proviennent des suites spectrales évidentes. La trivialité des faisceaux $(R^1 p_{Z*}) \mathscr{D}iv_Z$ et $p_{X*}(R^1 p_*) \mathscr{K}_Z^*$ assure que le morphisme du bas et celui de droite sont injectifs, ce qui implique que l'on a une égalité

$$\mathrm{Ker}\big(\big(R^2 p_{X*}\big) p_* \mathbf{G}_{mZ} \to \big(R^2 p_{X*}\big) p_* \mathscr{K}_Z^*\big) = \mathrm{Ker}\big(\big(R^2 p_{X*}\big) p_* \mathbf{G}_{mZ} \to \big(R^2 p_{Z*}\big) \mathbf{G}_{mZ}\big),$$

donc la suite exacte (10) se réécrit

$$0 \to \partial_2\big(p_{X*} R^1 p_* \mathbf{G}_{mZ}\big) \to R^2 p_{X*} \mathbf{G}_{mX} \to R^2 p_{Z*} \mathbf{G}_{mZ}. \tag{12}$$

Finalement, le triangle (11) et la suite (12) terminent la preuve de la proposition 2.2. $\square$

Poursuivons la preuve du théorème 2.1. On considère le triangle exact :

$$\mathbf{G}_m \to \mathrm{UPic}'(p : Z \to X) \to \mathrm{UPic}(p : Z \to X) \to \mathbf{G}_m[1]. \tag{13}$$

La proposition 1.10 assure que l'on a un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée :

$$C_{\overline{Y}/X} \cong \mathrm{UPic}(p : Z \to X).$$

Donc la suite exacte longue associée au triangle (13) fournit les suites exactes :

$$0 \to H^0(k, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{H}^0\big(k, \mathrm{UPic}'(p)\big) \to \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{Y}/X}) \to H^1(k, \mathbf{G}_m) = 0 \tag{14}$$

et

$$\begin{aligned}0 &\to \mathbf{H}^1\bigl(k, \mathrm{UPic}'(p)\bigr) \to \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}) \to H^2(k, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{H}^2\bigl(k, \mathrm{UPic}'(p)\bigr)\\ &\to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}) \to H^3(k, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{H}^3\bigl(k, \mathrm{UPic}'(p)\bigr).\end{aligned} \tag{15}$$

Or la proposition 2.2 assure que l'on a un triangle exact canonique :

$$\mathrm{UPic}'(p) \to \tau_{\leqslant 2}\mathbf{R}p_{X*}\mathbf{G}_{m\,X} \to \bigl(R^2 p_{X*}\mathbf{G}_{m\,X}/\partial_2\bigl(p_{X*}R^1 p_*\mathbf{G}_{m\,Z}\bigr)\bigr)[-2] \to \mathrm{UPic}'(p)[1]. \tag{16}$$

Ce triangle induit des isomorphismes canoniques :

$$\mathbf{H}^0\bigl(k, \mathrm{UPic}'(p)\bigr) = k[X]^*, \qquad \mathbf{H}^1\bigl(k, \mathrm{UPic}'(p)\bigr) = \mathrm{Pic}(X),$$

ainsi que l'isomorphisme suivant (via la seconde partie de la proposition 2.2) :

$$\mathbf{H}^2\bigl(k, \mathrm{UPic}'(p)\bigr) = \mathrm{Ker}\bigl(\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Br}(\overline{Z})\bigr).$$

En combinant ces isomorphismes avec les suites exactes (14) et (15), on obtient le théorème 2.1, à condition d'identifier le groupe $\mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Br}(\overline{Z}))$ à $\mathrm{Br}_1(X, \overline{Y}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X}) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Br}(\overline{Y}))$, et de comparer $\mathrm{Ker}(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{H}^3(k, \mathrm{UPic}'(p)))$ à $\mathrm{Ker}(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m))$.

On dispose d'abord du fait suivant :

Lemme 2.4. *Le morphisme* $\mathrm{Pic}(\overline{H'}) \to \mathrm{Pic}(\overline{H})$ *est surjectif.*

Démonstration. On note $\overline{H}^{\mathrm{red}}$ le quotient de $\overline{H}$ par son radical unipotent. Le morphisme $\mathrm{Pic}(\overline{H}^{\mathrm{red}}) \to \mathrm{Pic}(\overline{H})$ est surjectif car le groupe de Picard du radical unipotent est trivial. Le morphisme $\overline{H}^{\mathrm{red}} \to \overline{H}'$ est un morphisme surjectif, à noyau diagonalisable, entre groupes connexes, par conséquent la proposition 4.2 de [16] assure que le morphisme $\mathrm{Pic}(\overline{H}') \to \mathrm{Pic}(\overline{H}^{\mathrm{red}})$ est surjectif. D'où le lemme. □

Considérons le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Pic}(\overline{H'}) \arrow[dl] \arrow[d, "\Delta_{\overline{Z}/\overline{X}}"] & \\
\mathrm{Pic}(\overline{H}) \arrow[r, "\Delta_{\overline{Y}/\overline{X}}"'] & \mathrm{Br}(\overline{X}) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "p^*"] & \mathrm{Br}(\overline{Y}) \arrow[d, "="] \\
 & \mathrm{Br}(\overline{Z}) \arrow[r, "\pi'^*"] & \mathrm{Br}(\overline{Y}).
\end{tikzcd}$$

On déduit du lemme 2.4, par une chasse au diagramme, que l'inclusion

$$\mathrm{Ker}\bigl(\mathrm{Br}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Br}(\overline{Z})\bigr) \subset \mathrm{Br}_1(X, \overline{Y})$$

est en fait une égalité.

Pour conclure la preuve du théorème 2.1, montrons que l'on a une injection

$$\mathrm{Ker}\bigl(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{H}^3\bigl(k, \mathrm{UPic}'(p)\bigr)\bigr) \hookrightarrow \mathrm{Ker}\bigl(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m)\bigr).$$

Pour cela, on considère le carré commutatif suivant, où le morphisme horizontal inférieur est extrait du triangle exact (16) et les morphismes verticaux sont les morphismes évidents :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_m \arrow[r, "="] \arrow[d] & \mathbf{G}_m \arrow[d] \\ \mathrm{UPic}'(p) \arrow[r] & \tau_{\leqslant 2}\mathbf{R}p_{X*}\mathbf{G}_{mX}. \end{tikzcd}$$

Or $\mathbf{H}^3(k, \tau_{\leqslant 2}\mathbf{R}p_{X*}\mathbf{G}_{mX}) \cong \mathrm{Ker}(H^3(X, \mathbf{G}_m) \to H^3(\overline{X}, \mathbf{G}_m))$ (voir [6, 2.18]), donc on déduit immédiatement de ce diagramme une inclusion

$$\mathrm{Ker}\big(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{H}^3\big(k, \mathrm{UPic}'(p)\big)\big) \subset \mathrm{Ker}\big(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m)\big),$$

ce qui termine la preuve du théorème 2.1. □

Corollaire 2.5. *On conserve les hypothèses du théorème* 2.1.

- *Supposons que $Z(k) \neq \emptyset$. Alors on a trois isomorphismes canoniques*

$$U(X) \cong \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{Y}/X}), \qquad \mathrm{Pic}(X) \cong \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}), \qquad \mathrm{Br}_a(X, Y) \cong \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}).$$

- *Supposons que* $\mathrm{Br}(k)$ *s'injecte dans* $\mathrm{Br}(X)$. *Alors on a des isomorphismes*

$$U(X) \cong \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{Y}/X}), \qquad \mathrm{Pic}(X) \cong \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}),$$

  et une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}_a(X, \overline{Y}) \to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}) \to \mathrm{Ker}\big(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m)\big).$$

- *Supposons que $H^3(k, \mathbf{G}_m)$ s'injecte dans $H^3(X, \mathbf{G}_m)$. Alors on a des isomorphismes*

$$U(X) \cong \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{Y}/X}), \qquad \mathrm{Br}_a(X, \overline{Y}) \cong \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}),$$

  et une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}) \to \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)\big).$$

Démonstration.

- On suppose que $Z(k) \neq \emptyset$. Alors comme dans la section 2.8 de [6], un point $z \in Z(k)$ définit une section du triangle exact (13) :

$$\mathbf{G}_m \to \mathrm{UPic}'(p : Z \to X) \to \mathrm{UPic}(p : Z \to X) \to \mathbf{G}_m[1].$$

  L'existence de cette section assure que les morphismes $\mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}) \to \mathrm{Br}(k)$ et $\mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}) \to H^3(k, \mathbf{G}_m)$ dans la suite exacte du théorème 2.1 sont des morphismes nuls, d'où le premier point du corollaire.
- Le théorème 2.1 implique les deux autres points du corollaire. □

3. Groupe de Brauer algébrique d'un torseur

Dans cette section, on applique les résultats généraux de la section 2 à la situation d'un torseur $\pi : Y \xrightarrow{H} X$ défini sur k. Ceci est clairement un cas particulier de torseur avec donnée de recollement. Dans cette section, on utilise la k-forme $Z \to X$ naturellement associée au torseur $Y \to X$ pour définir le complexe $C_{\overline{Y}/X}$ (et non la k-forme définie à la remarque 1.3), de sorte que l'on a un morphisme naturel de X-torseurs $Y \to Z$. On déduit des sections précédentes les résultats suivants :

Théorème 3.1. *Soit k un corps de caractéristique nulle, X une k-variété lisse géométriquement intègre, H un k-groupe linéaire connexe et $\pi : Y \xrightarrow{H} X$ un X-torseur. On a un isomorphisme canonique, fonctoriel en (X, Y, H, π) :*

$$U(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{Y}/X}),$$

et une suite exacte de groupes commutatifs, fonctorielle en (X, Y, H, π) :

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}) \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(X, Y) \to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}) \to N^3(k, \mathbf{G}_m),$$

où $N^3(k, \mathbf{G}_m) := \mathrm{Ker}(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m))$.

On en déduit aussi les corollaires suivants. Le premier est évident :

Corollaire 3.2. *Avec les notations du théorème* 3.1 :

- *Supposons que* $\mathrm{Br}(k)$ *s'injecte dans* $\mathrm{Br}(X)$. *Alors on a des isomorphismes*

$$U(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{Y}/X}), \qquad \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}),$$

et une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}_a(X, Y) \to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}) \to \mathrm{Ker}\big(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{H}^3(X, \mathbf{G}_m)\big).$$

- *Supposons que $H^3(k, \mathbf{G}_m)$ s'injecte dans $H^3(X, \mathbf{G}_m)$. Alors on a des isomorphismes*

$$U(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{Y}/X}), \qquad \mathrm{Br}_a(X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}),$$

et une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}) \to \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)\big).$$

Le second concerne les torseurs munis d'un point rationnel (voir [6, 2.8] pour les notations $\bar{k}(Y)^*_{y,1}$ et $\mathrm{Div}(\overline{Y})_y$) :

Corollaire 3.3. *Avec les notations du théorème* 3.1, *supposons qu'il existe $y \in Y(k)$. Alors on a trois isomorphismes*

$$U(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{Y}/X}), \qquad \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{Y}/X}), \qquad \mathrm{Br}_a(X, Y) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}).$$

En outre, le complexe $C_{\overline{Y}/X}$ est canoniquement quasi-isomorphe au complexe de modules galoisiens

$$\mathrm{Cône}\big(\big[\bar{k}(Y)^*_{y,1} \to \mathrm{Div}(\overline{Y})_y\big] \xrightarrow{i_y^*} \big[\bar{k}(H)^*_{e,1} \to \mathrm{Div}(\overline{H})_e\big]\big)$$

(*où $i_y : H \to Y$ est définie par $h \mapsto y.h$*), *i.e. à*

$$\big[\bar{k}(Y)^*_{y,1} \to \bar{k}(H)^*_{e,1} \oplus \mathrm{Div}(\overline{Y})_y \to \mathrm{Div}(\overline{H})_e\big].$$

Démonstration. La seule chose à démontrer est le quasi-isomorphisme

$$C_{\overline{Y}/X} \to C_{\overline{Y}/X,y} := \mathrm{Cône}\big(\big[\bar{k}(Y)^*_{y,1} \to \mathrm{Div}(\overline{Y})_y\big] \xrightarrow{i_y^*} \big[\bar{k}(H)^*_{e,1} \to \mathrm{Div}(\overline{H})_e\big]\big).$$

Pour ce faire, il est clair (voir [6, 2.8]) que $C_{\overline{Y}/X}$ est quasi-isomorphe à

$$C_{\overline{Z}/X,z} := \mathrm{Cône}\big(\big[\bar{k}(Z)^*_{z,1} \to \mathrm{Div}(\overline{Z})_z\big] \xrightarrow{i_z^*} \big[\bar{k}\big(H'\big)^*_{e,1} \to \mathrm{Div}\big(\overline{H'}\big)_e\big]\big),$$

où $z \in Z(k)$ est l'image de y. Or on a un diagramme commutatif naturel de complexes de modules galoisiens :

$$\begin{tikzcd}
{[\bar{k}(Z)^*_{z,1} \to \mathrm{Div}(\overline{Z})_z]} \arrow[r] \arrow[d] & {[\bar{k}(H')^*_{e,1} \to \mathrm{Div}(\overline{H'})_e]} \arrow[d] \\
{[\bar{k}(Y)^*_{y,1} \to \mathrm{Div}(\overline{Y})_y]} \arrow[r] & {[\bar{k}(H)^*_{e,1} \to \mathrm{Div}(\overline{H})_e]}
\end{tikzcd}$$

dont on déduit un morphisme canonique de complexes de modules galoisiens

$$\alpha : C_{\overline{Z}/X,z} \to C_{\overline{Y}/X,y}.$$

Montrons que ce dernier est un quasi-isomorphisme. Pour $i = 0, 1, 2$, on définit

$$f_i := \mathscr{H}^i(\alpha) : \mathscr{H}^i(C_{\overline{Z}/X,z}) \to \mathscr{H}^i(C_{\overline{Y}/X,y}).$$

Le morphisme f_0 s'intègre dans le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0(C_{\overline{Z}/X,z}) \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & U(\overline{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & U(\overline{H'}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0(C_{\overline{Y}/X,y}) \arrow[r] & U(\overline{Y}) \arrow[r] & U(\overline{H}),
\end{tikzcd}$$

ce qui assure (en utilisant par exemple la proposition 6.10 de [28]) que f_0 est un isomorphisme qui identifie $\mathscr{H}^0(C_{\overline{Z}/X,z})$ et $\mathscr{H}^0(C_{\overline{Y}/X,y})$ à $U(\overline{X})$.

En degré 2, le morphisme f_2 s'identifie au morphisme canonique

$$\mathrm{Pic}\big(\overline{H'}\big)/\mathrm{Pic}(\overline{Z}) \to \mathrm{Pic}(\overline{H})/\mathrm{Pic}(\overline{Y}).$$

Or on a un diagramme commutatif de suites exactes (voir [28, proposition 6.10] ou [4, théorème 2.8]) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\overline{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(\overline{H}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}(\overline{X}) \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Pic}(\overline{Y}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{H}) \arrow[r] & \mathrm{Br}(\overline{X}),
\end{tikzcd}$$

et le lemme 2.4 assure que le morphisme central est surjectif. Une chasse au diagramme assure alors que le morphisme

$$\mathrm{Pic}(\overline{H}')/\mathrm{Pic}(\overline{Z}) \to \mathrm{Pic}(\overline{H})/\mathrm{Pic}(\overline{Y})$$

est un isomorphisme

De la même façon, en degré 1, la cohomologie des deux complexes $C_{\overline{Y}/X,y}$ et $C_{\overline{Z}/X,z}$ est exactement $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ et le morphisme f_1 est l'identité de $\mathrm{Pic}(\overline{X})$.

Finalement, tous les f_i sont des isomorphismes, donc α est un quasi-isomorphisme. □

Example 3.4. Dans la situation du théorème 3.1, l'objet $C_{\overline{Y}/X}$ est parfois représentable par un complexe explicite de modules galoisiens définis à partir de Y et H (sans faire intervenir Z), comme le montrent les exemples suivants :

- Supposons qu'il existe $y \in Y(k)$. Alors on a montré au corollaire 3.3 l'existence d'un quasi-isomorphisme canonique :

$$C_{\overline{Y}/X} \to \left[\bar{k}(Y)^*_{y,1}/\bar{k}^* \to \mathrm{Div}(\overline{Y})_y \oplus \bar{k}(H)^*_{e,1}/k^* \to \mathrm{Div}(\overline{H})_e\right].$$

- Supposons que $H^{\mathrm{tor}} = 0$. Alors on a un quasi-isomorphisme canonique :

$$C_{\overline{Y}/X} \to \left[\bar{k}(Y)^*/\bar{k}^* \to \mathrm{Div}(\overline{Y}) \xrightarrow{\varphi_1} \mathrm{Pic}(\overline{H})\right].$$

4. Groupe de Brauer des espaces homogènes

Dans cette section, on donne une autre application des résultats généraux de la section 2, application aux espaces homogènes à stabilisateurs linéaires connexes, ne possédant pas nécessairement de point rationnel.

Considérons un groupe algébrique connexe G sur un corps k de caractéristique nulle, et un espace homogène (à gauche) X de G sur k. Si on choisit $\bar{x} \in X(\bar{k})$, on obtient un morphisme

$$\overline{\pi}_{\bar{x}} : \overline{G} \xrightarrow{\overline{H}} \overline{X}$$

défini par $\overline{\pi}_{\bar{x}}(\bar{g}) := \bar{g}.\bar{x}$, qui est un torseur (à droite) sous le $\bar{k}$-groupe linéaire $\overline{H} := \mathrm{Stab}_{\overline{G}}(\bar{x})$. Sur $\bar{k}$, on dispose d'un diagramme commutatif naturel :

$$\begin{tikzcd}
\overline{G} \arrow[r, "\overline{H}^{\mathrm{u}}"] \arrow[ddr, "\overline{H}"'] & \overline{Z'} \arrow[dd, "\overline{H}^{\mathrm{red}}"] \arrow[dr, "Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}"] & \\
 & & \overline{Z} \arrow[dl, "\overline{H'}"] \\
 & \overline{X} & .
\end{tikzcd}$$

Remarquons que $\overline{G}$ est muni d'une structure de $\overline{X}$-torseur à droite sous $\overline{H}$ et d'une action à gauche de $\overline{G}$. Cela induit sur $\overline{Z}$ une structure de $\overline{X}$-torseur à droite sous $\overline{H'}$ et une action à gauche de $\overline{G}$.

La donnée de $\bar{x}$ définit une donnée de recollement sur $\overline{\pi}_{\bar{x}} : \overline{G} \to \overline{X}$ (voir [19, proposition 3.3]), i.e. une extension localement scindée de groupes topologiques

$$1 \to \overline{H}(\bar{k}) \to \mathrm{SAut}_G(\overline{G}/X) \to \Gamma_k \to 1$$

vérifiant les conditions de la définition 1.2 et de la définition 2.1 de [19]. Par fonctorialité, cette suite induit une suite exacte

$$1 \to \overline{H'}(\bar{k}) \to \mathrm{SAut}_G(\overline{Z}/X) \to \Gamma_k \to 1 \tag{17}$$

où $\mathrm{SAut}_G(\overline{Z}/X)$ désigne le sous-groupe de $\mathrm{SAut}(\overline{Z}/X)$ formé des φ tels que

$$\varphi(g.z) = \left({}^{q(\varphi)}g\right).\varphi(z)$$

($q : \mathrm{SAut}(\overline{Z}/X) \to \Gamma_k$ est le morphisme évident et l'action de $\overline{G}$ sur $\overline{Z}$ est celle mentionnée plus haut).

On est donc dans le cadre général développé à la section 2. Remarquons que le fait que la classe de la donnée de recollement sur $\overline{Z}/X$ soit neutre (i.e. que l'extension (17) soit scindée) assure non seulement que le torseur $\overline{Z}/\overline{X}$ descende en Z/X, mais aussi que l'action de $\overline{G}$ sur $\overline{Z}$ descende en une action de G sur Z compatible à l'action sur X, faisant de Z un espace homogène de G à stabilisateur $\mathrm{Ker}(\overline{H} \to \overline{H'})$.

Dans la suite, on sera amené à faire l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

1. L'espace homogène X a un point rationnel, i.e. $X(k) \neq \emptyset$.
2. Le groupe G est linéaire et $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$, i.e. $G^{\mathrm{ab}} = 0$ et G^{ss} est simplement connexe.

Sous l'une ou l'autre de ces hypothèses, on va associer à X un complexe de modules galoisiens de longueur 3 noté $\widehat{C}_X := [M_1 \to M_2 \to M_3]$ (par convention, M_1 est en degré 0 et M_3 en degré 2) et construire un morphisme canonique de groupes abéliens $\kappa_X : \mathrm{Br}_a(X, G) \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{C}_X)$. Pour ce faire, on va relier le complexe $\widehat{C}_X$ au complexe $C_{\overline{G}/X}$ (cf. section 1.2), puis appliquer les résultats généraux de la section 2.

4.1. *Le complexe associé à un espace homogène*

4.1.1. *Le complexe associé à un groupe algébrique connexe*

On commence par construire la sous-variété semi-abélienne maximale d'un groupe algébrique connexe.

Si G/k est un groupe réductif, on note G^{ss} son sous-groupe dérivé et G^{sc} le revêtement simplement connexe de G^{ss}. On a donc d'un morphisme $\rho : G^{\mathrm{sc}} \to G$. On notera Z_G le centre de G, $Z_{G^{\mathrm{sc}}}$ celui de G^{sc}, et T_G un k-tore maximal de G. On pose $T_{G^{\mathrm{sc}}} := \rho^{-1}(T_G)$, qui est un tore maximal de G^{sc}.

Désormais G est un k-groupe algébrique connexe.

Par un théorème de Rosenlicht (voir [27, corollaire 3 du théorème 12]), il existe $D \subset G$ un k-sous-groupe distingué connexe tel que $G_{\mathrm{lin}} := G/D$ soit linéaire et vérifie la propriété universelle suivante : pour tout k-groupe linéaire H et tout morphisme $f : G \to H$, il existe un unique morphisme $f_{\mathrm{lin}} : G_{\mathrm{lin}} \to H$ tel que f se factorise par le quotient $G \to G_{\mathrm{lin}}$. Outre la suite exacte ainsi obtenue :

$$1 \to D \to G \xrightarrow{\pi} G_{\mathrm{lin}} \to 1,$$

on dispose du théorème de Chevalley : il existe un sous-groupe caractéristique $G^{\mathrm{lin}} \subset G$, qui est linéaire connexe, et tel que le quotient $G^{\mathrm{ab}} := G/G^{\mathrm{lin}}$ soit une k-variété abélienne.

$$1 \to G^{\mathrm{lin}} \to G \xrightarrow{p} G^{\mathrm{ab}} \to 1.$$

On a alors le fait suivant (voir [27, corollaire 1 du théorème 13 et corollaire 5 du théorème 16]) :

Lemme 4.1. *Avec les notations précédentes,*

1. $G = G^{\mathrm{lin}}.D$.
2. *Le sous-groupe D est central, i.e. $D \subset Z_G$.*

On déduit de ce lemme le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & G^{\mathrm{lin}} \cap D \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & G^{\mathrm{lin}} \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & 1 \\
 & G_{\mathrm{lin}} \arrow[r, "="] \arrow[d] & G_{\mathrm{lin}} \arrow[d] & & \\
 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd} \tag{18}$$

Notons que le groupe $G^{\mathrm{lin}} \cap D$ est un sous-groupe central de G^{lin}, donc c'est un groupe linéaire commutatif.

On fait d'abord l'hypothèse suivante : *le groupe G^{lin} est réductif*. Alors G_{lin} est réductif. Fixons $T_{G_{\mathrm{lin}}} \subset G_{\mathrm{lin}}$ un k-tore maximal. La suite exacte

$$1 \to G^{\mathrm{lin}} \cap D \to G^{\mathrm{lin}} \xrightarrow{\pi'} G_{\mathrm{lin}} \to 1$$

assure que $T_G = T_{G^{\mathrm{lin}}} := \pi'^{-1}(T_{G_{\mathrm{lin}}}) \subset G^{\mathrm{lin}}$ est un tore maximal de G^{lin}. Définissons alors $\mathrm{SA}_G := \pi^{-1}(T_{G_{\mathrm{lin}}}) \subset G$. Le diagramme (18) induit un diagramme commutatif de groupes algébriques commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & G^{\mathrm{lin}} \cap D \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & T_G \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & \mathrm{SA}_G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & 1 \\
 & T_{G_{\mathrm{lin}}} \arrow[r, "="] \arrow[d] & T_{G_{\mathrm{lin}}} \arrow[d] & & \\
 & 1 & 1 & &
\end{tikzcd}$$

Le groupe SA_G est donc une extension de la variété abélienne G^{ab} par le k-tore T_G. Donc SA_G est une variété semi-abélienne sur k. Cette variété semi-abélienne joue le rôle que joue le tore maximal dans les groupes réductifs.

Lemme 4.2. *Le groupe* SA_G *est une sous-variété semi-abélienne maximale de* G*, i.e. toute variété semi-abélienne contenue dans* G *et contenant* SA_G *est égale à* SA_G*.*

Démonstration. La preuve est évidente. □

Si G^{sc} désigne le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G^{lin}, on a bien des morphismes naturels $\rho_G : G^{\mathrm{sc}} \to G$ et $\rho_G : T_{G^{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{SA}_G$ de sorte que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
Z_{G^{\mathrm{sc}}} \arrow[r] \arrow[d] & T_{G^{\mathrm{sc}}} \arrow[r] \arrow[d] & G^{\mathrm{sc}} \arrow[d] \\
Z_G \arrow[r] & \mathrm{SA}_G \arrow[r] & G.
\end{tikzcd} \tag{19}$$

Lemme 4.3. *Le diagramme* (19) *définit des quasi-isomorphismes de modules croisés*

$$[Z_{G^{\mathrm{sc}}} \to Z_G] \to [T_{G^{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{SA}_G] \to \left[G^{\mathrm{sc}} \to G\right].$$

Démonstration. On commence par vérifier que le morphisme $G^{\mathrm{sc}} \to G$ définit un module croisé. Par le lemme 2, on sait que $Z_{G^{\mathrm{lin}}} = Z_G \cap G^{\mathrm{lin}}$ et que l'on a une suite exacte

$$0 \to Z_{G^{\mathrm{lin}}} \to Z_G \to G^{\mathrm{ab}} \to 0.$$

On définit un morphisme $G \to \mathrm{Aut}(G^{\mathrm{sc}})$ comme le composé des morphismes :

$$G \to G/Z_G \cong G^{\mathrm{lin}}/Z_{G^{\mathrm{lin}}} \cong G^{\mathrm{sc}}/Z_{G^{\mathrm{sc}}} = \mathrm{Int}\left(G^{\mathrm{sc}}\right) \subset \mathrm{Aut}\left(G^{\mathrm{sc}}\right).$$

On vérifie alors immédiatement que cette action de G sur G^{sc} définit une structure de module croisé sur $G^{\mathrm{sc}} \to G$. Avec cette définition, le diagramme (19) est bien formé de morphismes de modules croisés.

Pour montrer que les morphismes du lemme sont des quasi-isomorphismes, la preuve est identique à celle du lemme 2.4.1 de [2], en remarquant que $G = G^{\mathrm{ss}}.Z_G = G^{\mathrm{ss}}.\mathrm{SA}_G$ (voir le lemme 2) et que $\rho_G(T_{G^{\mathrm{sc}}}) = \mathrm{SA}_G \cap G^{\mathrm{ss}}$ et $\rho_G(Z_{G^{\mathrm{sc}}}) = Z_G \cap G^{\mathrm{ss}}$. □

Plus généralement, si G^{lin} n'est pas supposé réductif, on note G^{u} le radical unipotent de G^{lin}, $\mathrm{SA}_G := \mathrm{SA}_{G/G^{\mathrm{u}}}$ et $C_G := [T_{G^{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{SA}_G]$.

Example 4.4.

- Si G est réductif, on retrouve le complexe de tores $C_G = [T_{G^{\mathrm{sc}}} \to T_G]$ utilisé par Borovoi (voir [2]).
- Si G est une variété semi-abélienne, alors $C_G = [0 \to G]$ peut être considéré comme le 1-motif associé à G.

Pour tout groupe connexe G, on a donc construit le complexe $C_G := [T_{G^{\mathrm{sc}}} \xrightarrow{\rho_G} \mathrm{SA}_G]$. On voit ce complexe comme un objet de la catégorie des complexes de groupes algébriques commutatifs sur k. L'objet qui nous intéresse est le complexe de modules galoisiens « dual » du complexe C_G, noté $\widehat{C}_G$:

$$\widehat{C}_G := \left[\widehat{T_G} \to \left(G^{\mathrm{ab}}\right)^*(\bar{k}) \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}}\right],$$

avec $\widehat{T_G}$ en degré 0. Définissons aussi une variante de ce complexe :

$$\widehat{C}'_G := \left[\widehat{T_G} \to \mathrm{Pic}\left(\overline{G^{\mathrm{ab}}}\right) \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}}\right],$$

où le morphisme $\Delta'_{\mathrm{SA}_G/G^{\mathrm{ab}}} : \widehat{T_G} \to \mathrm{Pic}(\overline{G^{\mathrm{ab}}})$ est défini via le torseur $\mathrm{SA}_G \to G^{\mathrm{ab}}$ sous T_G.

Remarquons d'abord que le complexe $\widehat{C}'_G$ est naturellement quasi-isomorphe au complexe analogue défini à l'aide des centres des groupes respectifs :

$$\left[\widehat{Z_{G^{\mathrm{red}}}} \to \mathrm{Pic}\left(\overline{G^{\mathrm{ab}}}\right) \oplus \widehat{Z_{G^{\mathrm{sc}}}}\right].$$

Cela assure que les complexes $\widehat{C}_G$ et $\widehat{C}'_G$ ne dépendent pas des tores maximaux choisis.

Le complexe $\widehat{C}_G$ est lié au groupe $\mathrm{Br}(G)$. Le point crucial est le théorème suivant, qui généralise le théorème 4.8 de [6] au cas des groupes non linéaires. On rappelle que pour une variété V sur un corps algébriquement clos, le groupe de Néron-Severi est noté $\mathrm{NS}(V)$.

Théorème 4.5. *Soit G un groupe algébrique connexe. Il existe dans la catégorie dérivée un isomorphisme canonique*

$$\widehat{C}'_G \cong \mathrm{UPic}(\overline{G})$$

et un triangle exact canonique

$$\widehat{C}_G \to \mathrm{UPic}(\overline{G}) \to \mathrm{NS}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right)[-1] \to \widehat{C}_G[1].$$

Démonstration. L'isomorphisme $(\overline{G}^{\mathrm{ab}})^*(\bar{k}) \cong \mathrm{Pic}^0(\overline{G}^{\mathrm{ab}})$ induit une suite exacte

$$0 \to \left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right)^*(\bar{k}) \to \mathrm{Pic}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right) \to \mathrm{NS}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right) \to 0.$$

Par conséquent, il suffit de montrer que le complexe $[\widehat{T_G} \to \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \oplus \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}})]$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{UPic}(\overline{G})$. Enfin, puisque le morphisme naturel $\mathrm{UPic}(\overline{G}/\overline{G}^{\mathrm{u}}) \to \mathrm{UPic}(\overline{G})$ est un isomorphisme, on peut supposer que G^{lin} est réductif.

Lemme 4.6. *Le diagramme naturel suivant*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{T_G} \arrow[r, "\widehat{\rho}\oplus\Delta'_{\mathrm{SA}_G/G^{\mathrm{ab}}}"] & \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \oplus \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}}) \\
\widehat{T_G} \oplus \bar{k}(G)^*/\bar{k}^* \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & \mathrm{UPic}_{\overline{T}_G}(\overline{G})^1 \arrow[u, "f_1\oplus f_2"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Div}}"] \\
\bar{k}(G)^*/\bar{k}^* \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \mathrm{Div}(\overline{G})
\end{tikzcd} \tag{20}$$

est commutatif et induit des quasi-isomorphismes entre les complexes horizontaux.

Démonstration. Le groupe $\mathrm{UPic}_{\overline{T}_G}(\overline{G})^1$ est défini dans [7, section 2], de la façon suivante : si H est un k-groupe linéaire connexe agissant (à gauche) sur une k-variété géométriquement intègre Y, on note

$$\mathrm{UPic}_{\overline{H}}(\overline{Y})^1 := \left\{ (D,z) \in \mathrm{Div}(\overline{Y}) \times \bar{k}(H \times Y)^* \colon \begin{cases} z_{h_1h_2}(y) = z_{h_1}(h_2.y).z_{h_2}(y) \\ \mathrm{div}(z) = m^*D - \mathrm{pr}_Y^*D \end{cases} \right\},$$

où $m : H \times Y \to Y$ désigne l'action de H sur Y et $\mathrm{pr}_Y : H \times Y \to Y$ désigne la projection sur le second facteur. On dispose d'un complexe canonique (voir [7, définition 2.3])

$$\mathrm{UPic}_{\overline{H}}(\overline{Y}) := \left[\bar{k}(Y)^*/\bar{k}^* \xrightarrow{d} \mathrm{UPic}_{\overline{H}}(\overline{Y})^1\right]$$

défini par $d(f) := (\mathrm{div}(f), \frac{m^*f}{\mathrm{pr}_Y^*f})$, tel que $\mathrm{Ker}(d)$ soit canoniquement isomorphe à $U_{\overline{H}}(\overline{Y})$ et $\mathrm{Coker}(d)$ à $\mathrm{Pic}_{\overline{H}}(\overline{Y})$ (voir [7, section 2 et théorème 3.13]).

Définissons chacun des morphismes apparaissant dans le diagramme (20). Le morphisme $\lambda : \widehat{T_G} \oplus \bar{k}(G)^*/\bar{k}^* \to \mathrm{UPic}_{\overline{T}_G}(\overline{G})^1$ est défini par la formule suivante : $\lambda(\chi, f) := (\chi.d^0(f), \mathrm{div}(f))$, où $d^0(f) : (t,g) \mapsto f(t.g)/f(g)$. Le morphisme f_1 est la composée

$$f_1 : \mathrm{UPic}_{\overline{T}_G}(\overline{G})^1 \xrightarrow{\nu} \mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{G}) \to \mathrm{Pic}_{\overline{T}_{G^{\mathrm{sc}}}}\left(\overline{G}^{\mathrm{sc}}\right) \xleftarrow{\cong} \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}},$$

où ν est le morphisme naturel (voir [7, théorème 3.13]) et le dernier morphisme provient de [22, lemme 2.2 et proposition 2.3]. De même, f_2 est la composée

$$f_2 : \mathrm{UPic}_{\overline{T}_G}(\overline{G})^1 \xrightarrow{\nu} \mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{G}) \to \mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{\mathrm{SA}}_G) \xleftarrow{\cong} \mathrm{Pic}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right),$$

où le dernier morphisme provient de la proposition 5.1 de [22]. Les autres morphismes du diagramme (20) sont les morphismes naturels.

On vérifie facilement que le diagramme (20) est commutatif.

Montrons que le diagramme (20) définit des quasi-isomorphismes entre les complexes horizontaux. Considérons d'abord le carré inférieur. Les noyaux de λ et div sont clairement isomorphes via pr_2 (ils sont canoniquement isomorphes à $U(\overline{G})$). Le morphisme $\mathrm{Coker}(\lambda) \to \mathrm{Coker}(\mathrm{div})$ s'identifie au morphisme naturel $\mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{G})/H^1_{\mathrm{alg}}(\overline{T}_G, \mathscr{O}(\overline{G})^*) \to \mathrm{Pic}(\overline{G})$ (on renvoie au paragraphe 2 de [22] pour la définition de $H^1_{\mathrm{alg}}(\overline{T}_G, \mathscr{O}(\overline{G})^*)$), et celui-ci est un isomorphisme par [22, lemme 2.2] (en utilisant $\mathrm{Pic}(\overline{T}_G) = 0$). Donc le carré inférieur définit un quasi-isomorphisme entre les complexes horizontaux.

Considérons pour finir le carré supérieur : à nouveau, il est clair que le morphisme pr_1 induit un isomorphisme $\mathrm{Ker}(\lambda) \cong \mathrm{Ker}(\widehat{\rho} \oplus \Delta'_{\mathrm{SA}_G/G^{\mathrm{ab}}})$. Montrons que $f_1 \oplus f_2 : \mathrm{Coker}(\lambda) \to \mathrm{Coker}(\widehat{\rho} \oplus \Delta'_{\mathrm{SA}_G/G^{\mathrm{ab}}})$ est un isomorphisme.

Lemme 4.7. *Le morphisme canonique* $\mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{G}) \to \mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{G}^{\mathrm{lin}}) \oplus \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Définissons les espaces homogènes $W := G/T_G$ et $W^{\mathrm{lin}} := G^{\mathrm{lin}}/T_G$. Considérons le diagramme commutatif « exact » de k-variétés suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & & \\
 & T_G \arrow[r, "="] \arrow[d] & T_G \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & G^{\mathrm{lin}} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\
1 \arrow[r] & W^{\mathrm{lin}} \arrow[r, "i"] \arrow[d] & W \arrow[r, "p"] \arrow[d] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & 1 \\
 & 1 & 1 & & .
\end{tikzcd} \tag{21}$$

Remarquons que les inclusions $T_G \subset \mathrm{SA}_G \subset G$ induisent un morphisme naturel $s : G^{\mathrm{ab}} \to W$ de sorte que $p \circ s = \mathrm{id}_{G^{\mathrm{ab}}}$. De la même façon, on a un morphisme naturel $q : W \to W^{\mathrm{lin}}$ obtenu en identifiant W^{lin} à G/SA_G, de sorte que $q \circ i = \mathrm{id}_{W^{\mathrm{lin}}}$. Considérons alors la suite de morphismes suivante :

$$0 \to \mathrm{Pic}\big(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\big) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Pic}(\overline{W}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Pic}\big(\overline{W}^{\mathrm{lin}}\big) \to 0. \tag{22}$$

Cette suite est clairement un complexe. L'existence des morphismes s et q assure son exactitude en $\mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}})$ et en $\mathrm{Pic}(\overline{W}^{\mathrm{lin}})$, ainsi que l'existence d'une section du morphisme i^*. Montrons que cette suite est exacte en $\mathrm{Pic}(\overline{W})$.

On dispose d'un diagramme commutatif, issu du diagramme (21), dont les lignes et les colonnes sont exactes (hormis la troisième ligne en $\mathrm{Pic}(\overline{W})$) :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \widehat{G} \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook, "\alpha"] & \widehat{G^{\mathrm{lin}}} \arrow[r, "t"] \arrow[d, hook, "\alpha'"] & \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}}) & \\
 & & \widehat{T_G} \arrow[r, "b", "="'] \arrow[d, "\beta"] & \widehat{T_G} \arrow[d, "\beta'"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}}) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}(\overline{W}) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathrm{Pic}(\overline{W}^{\mathrm{lin}}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0 & \\
\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \arrow[r, "t"] & \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}}) \arrow[r, "e"] & \mathrm{Pic}(\overline{G}) \arrow[r, "d"] & \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{lin}}) & .
\end{tikzcd} \tag{23}$$

Deux applications du lemme du serpent aux deux colonnes de ce diagramme assurent l'existence d'une suite exacte canonique

$$0 \to \widehat{G^{\mathrm{lin}}}/\widehat{G} \xrightarrow{h} \mathrm{Ker}\big(i^*\big) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ker}(d) \to 0$$

qui s'insère dans le diagramme suivant à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{G^{\mathrm{lin}}}/\widehat{G} & \xrightarrow{t} & \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}}) & \xrightarrow{e} & \mathrm{Ker}(d) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{=} & & \downarrow{p^*} & & \downarrow{=} & & \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{G^{\mathrm{lin}}}/\widehat{G} & \xrightarrow{h} & \mathrm{Ker}(i^*) & \xrightarrow{\gamma} & \mathrm{Ker}(d) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On vérifie alors facilement que ce diagramme est commutatif et on conclut avec le lemme des cinq que p^* identifie $\mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}})$ à $\mathrm{Ker}(i^*)$, ce qui conclut la preuve de l'exactitude de la suite (22), ce qui assure donc que l'on a un isomorphisme canonique

$$s^* \oplus i^* : \mathrm{Pic}(\overline{W}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}\big(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\big) \oplus \mathrm{Pic}\big(\overline{W}^{\mathrm{lin}}\big).$$

On conclut alors la preuve du lemme 4.7 en utilisant les isomorphismes fonctoriels de [22, proposition 5.1] $\mathrm{Pic}(\overline{W}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{G})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{W}^{\mathrm{lin}}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{G}^{\mathrm{lin}})$. □

Utilisons maintenant le lemme 4.7 pour montrer le lemme 4.6. Grâce à [7, théorème 3.13], le complexe central dans (20) est canoniquement quasi-isomorphe au complexe

$$\big[\widehat{T_G} \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{G})\big],$$

puisque $U_{\overline{T}_G}(\overline{G}) = U_{\overline{T}_G}(\overline{G}^{\mathrm{tor}}) = 0$, en utilisant le lemme 5.4 de [7].

Or ce complexe s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T_G} & \xrightarrow{\lambda^{\mathrm{lin}} \oplus \Delta'_{\mathrm{SA}_G/G^{\mathrm{ab}}}} & \mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{G}^{\mathrm{lin}}) \oplus \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}}) \\ {=}\uparrow & & \uparrow{f_1 \oplus f_2} \\ \widehat{T_G} & \xrightarrow{\lambda} & \mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{G}). \end{array}$$

qui est un isomorphisme entre les complexes horizontaux par le lemme 4.7. Enfin, on peut identifier canoniquement $\mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{G}^{\mathrm{lin}})$ à $\widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}}$ (en utilisant la proposition 5.1 de [22]), et donc le complexe $[\widehat{T_G} \xrightarrow{\lambda^{\mathrm{lin}} \oplus \Delta'_{\mathrm{SA}_G/G^{\mathrm{ab}}}} \mathrm{Pic}_{\overline{T}_G}(\overline{G}^{\mathrm{lin}}) \oplus \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}})]$ au complexe $[\widehat{T_G} \xrightarrow{\widehat{\rho} \oplus \Delta'_{\mathrm{SA}_G/G^{\mathrm{ab}}}} \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \oplus \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}})]$, ce qui assure que le carré supérieur dans le lemme 4.6 est un quasi-isomorphisme. □

Il est alors clair que le lemme 4.6 implique le théorème 4.5. □

4.1.2. Cas des espaces homogènes de groupes linéaires connexes

Revenons maintenant au cas de l'espace homogène X de G. Le lien $L_{\overline{G}/X}$ sur $\overline{H}$, défini par la donnée de recollement induite par $\bar{x} \in X(\bar{k})$, définit une k-forme $Z_{H^{\mathrm{red}}}$ du centre de $\overline{H}^{\mathrm{red}}$. De même, ce lien définit une k-forme $Z_{H^{\mathrm{sc}}}$ du centre de $\overline{H}^{\mathrm{sc}}$. Ces deux k-formes ne dépendent pas du point $\bar{x}$ choisi. Fixons une décomposition de Levi de $\overline{H}$. L'inclusion induite par cette décomposition $Z_{H^{\mathrm{red}}} \to G$ n'est pas en général Γ_k-équivariante. En revanche, on vérifie qu'au niveau des modules de caractères, le morphisme induit $\widehat{G} \to \widehat{Z_{H^{\mathrm{red}}}}$ est Γ_k-équivariant et ne dépend pas de la décomposition de Levi choisie. On dispose ainsi d'un complexe canonique de modules galoisiens :

$$\widehat{\widehat{C}}_X := [\widehat{G} \to \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}} \to \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}}].$$

On peut comparer le complexe $C_{\overline{G}/X}$ (défini via la convention de la remarque 1.3) avec le complexe $\widehat{\widehat{C}}_X$.

Pour cela, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{G} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}} \arrow[d, "\cong"] \\
\widehat{G} \arrow[r] & \mathrm{Pic}_{\overline{G}}(\overline{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{H'}) \\
\widehat{G} \oplus \bar{k}(Z)^*/\bar{k}^* \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & \mathrm{UPic}_{\overline{G}}(\overline{Z})^1 \arrow[r] \arrow[u, "\nu'"] \arrow[d, "\mu"] & \mathrm{Pic}(\overline{H'}) \arrow[u, "="] \arrow[d, "\cong"] \\
\bar{k}(Z)^*/\bar{k}^* \arrow[r] & \mathrm{Div}(\overline{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}'(\overline{Z}/\overline{X}).
\end{tikzcd} \tag{24}$$

Définissons les deux morphismes $\widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}} \cong \mathrm{Pic}_{\overline{G}}(\overline{Z})$ et $\widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}} \cong \mathrm{Pic}(\overline{H'})$. Pour le premier, on a un isomorphisme $\widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}} \cong \mathrm{Pic}_{\overline{G}}(\overline{G}/Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}})$ par [21, exemple 2.1] (voir aussi [25, théorème 4]), ainsi qu'un isomorphisme $\mathrm{Pic}_{\overline{G}}(\overline{Z}) \cong \mathrm{Pic}_{\overline{G}}(\overline{G}/Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}})$ puisque $\overline{G}/Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}} \to \overline{Z}$ est un torseur sous le groupe unipotent $\overline{H^{\mathrm{u}}}$. Pour le second, on a un isomorphisme bien connu $\widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}(\overline{H}^{\mathrm{sc}}/Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}})$, et le morphisme $\overline{H}^{\mathrm{sc}}/Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}} \to \overline{H}^{\mathrm{red}}/Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}} = \overline{H}'$ est un isomorphisme de groupes algébriques, donc $\mathrm{Pic}(\overline{H'}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}(\overline{H}^{\mathrm{sc}}/Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}})$, d'où l'isomorphisme recherché.

On vérifie facilement que ce diagramme est commutatif. On voit ce diagramme comme un diagramme entre les complexes de modules galoisiens horizontaux. On vérifie que ce diagramme réalise des quasi-isomorphismes entre les complexes des trois premières lignes.

On déduit de ce diagramme un morphisme dans la catégorie dérivée :

$$\widehat{\widehat{C}}_X \to C_{\overline{G}/X},$$

qui s'intègre dans le triangle exact suivant (indépendant du choix de $\bar{x}$) :

$$\widehat{\widehat{C}}_X \to C_{\overline{G}/X} \to \mathrm{Pic}(\overline{G})[-1] \to \widehat{\widehat{C}}_X[1].$$

On écrit alors la suite exacte longue associée à ce triangle, ainsi que la suite exacte du théorème 2.1, et on obtient les suites exactes suivantes :

$$0 \to \mathbf{H}^1(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \to \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{G}/X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{G})^{\Gamma_k} \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{G}/X}) \to H^1\big(k, \mathrm{Pic}(\overline{G})\big),$$

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{G}/X}) \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(X, G) \to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{G}/X}) \to N^3(k, \mathbf{G}_m),$$

où $N^3(k, \mathbf{G}_m) := \mathrm{Ker}(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m))$. On obtient aussi les isomorphismes $U(X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{G}/X}) \xleftarrow{\cong} \mathbf{H}^0(k, \widehat{\widehat{C}}_X)$. On peut donc finalement énoncer le résultat souhaité :

Théorème 4.8. *Soit k un corps de caractéristique nulle, G un k-groupe connexe, X un espace homogène de G, à stabilisateurs géométriques linéaires connexes $\overline{H}$. Définissons le complexe de modules galoisiens suivant*

$$\widehat{\widehat{C}}_X := [\widehat{G} \to \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}} \to \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}}].$$

- *On a des isomorphismes naturels*

$$\mathbf{H}^0(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \cong \mathbf{H}^0(k, C_{\overline{G}/X}) \cong U(X).$$

- *On a des suites exactes :*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbf{H}^1(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \to \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{G}/X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{G})^{\Gamma_k} \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \\ \to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{G}/X}) \to H^1\big(k, \mathrm{Pic}(\overline{G})\big) \end{aligned} \tag{25}$$

et

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{G}/X}) \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(X, G) \\ \to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{G}/X}) \to N^3(k, \mathbf{G}_m), \end{aligned} \tag{26}$$

où $N^3(k, \mathbf{G}_m) := \mathrm{Ker}(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m))$. *En particulier, si* $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$, *on a une suite exacte naturelle :*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{H}^1(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(X, G) \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \to N^3(k, \mathbf{G}_m).$$

On en déduit facilement ce corollaire concernant le groupe de Picard :

Corollaire 4.9. *Considérons les inclusions naturelles*

$$\mathbf{H}^1(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \xrightarrow{a} \mathbf{H}^1(k, C_{\overline{G}/X}) \xleftarrow{b} \mathrm{Pic}(X)$$

induites par (25) *et* (26).

- *Si* $X(k) \neq \emptyset$ *ou plus généralement si* $\mathrm{Br}(k)$ *s'injecte dans* $\mathrm{Br}(X)$, *alors* b *est un isomorphisme, donc on a une suite exacte canonique*

$$0 \to \mathbf{H}^1(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \xrightarrow{a} \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\overline{G})^{\Gamma_k}.$$

- *Si* G *est linéaire et* G^{ss} *simplement connexe* (*i.e.* $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$), *alors* a *est un isomorphisme et on a donc une suite exacte canonique*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{b} \mathbf{H}^1(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \to \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)\big).$$

- *Si* $\mathrm{Br}(k)$ *s'injecte dans* $\mathrm{Br}(X)$ (*par exemple* $X(k) \neq \emptyset$) *et* $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$, *alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{H}^1(k, \widehat{\widehat{C}}_X) \cong \mathrm{Pic}(X).$$

On déduit de même le corollaire suivant, concernant le groupe de Brauer :

Corollaire 4.10. *Considérons les morphismes naturels*

$$\mathbf{H}^2(k, \widehat{\overline{C}}_X) \xrightarrow{a} \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{G}/X}) \xleftarrow{b} \mathrm{Br}_a(X, G)$$

induits par (25) *et* (26)*.*

- *Si* $X(k) \neq \emptyset$ *ou si plus généralement* $H^3(k, \mathbf{G}_m)$ *s'injecte dans* $H^3(X, \mathbf{G}_m)$*, alors b est un isomorphisme, donc on a une suite exacte canonique*

$$\mathrm{Pic}(\overline{G})^{\Gamma_k} \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{\overline{C}}_X) \xrightarrow{a} \mathrm{Br}_a(X, G) \to H^1\big(k, \mathrm{Pic}(\overline{G})\big).$$

- *Si* $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$*, alors a est un isomorphisme et on a donc une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Br}_a(X, G) \xrightarrow{b} \mathbf{H}^2(k, \widehat{\overline{C}}_X) \to \mathrm{Ker}\big(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m)\big).$$

- *Si* $H^3(k, \mathbf{G}_m)$ *s'injecte dans* $H^3(X, \mathbf{G}_m)$ *et* $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$*, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbf{H}^2(k, \widehat{\overline{C}}_X) \cong \mathrm{Br}_a(X, G).$$

4.1.3. Cas des espaces homogènes munis d'un point rationnel

Dans cette sous-section, on s'intéresse au cas d'un espace homogène X d'un groupe connexe G quelconque, sans l'hypothèse $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$, mais en supposant que $X(k) \neq \emptyset$. On a besoin d'enlever l'hypothèse $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$ pour traiter les espaces homogènes de groupes non linéaires.

On fixe $x \in X(k)$. Cela revient à se donner un k-sous-groupe connexe $H \subset G$ tel que $X \cong G/H$. Suivant [3, proposition 3.1], quitte à quotienter G et H par le sous-groupe $Z_G \cap H \subset H$, on peut se ramener au cas où le stabilisateur est linéaire connexe. Aussi, dans les énoncés de cette section, l'hypothèse de linéarité sur H n'est-elle pas restrictive. Dans la suite, on suppose donc H linéaire.

Fixons pour commencer une décomposition de Levi de H et des tores maximaux de H, H^{sc}, G^{lin} et G^{sc} de façon compatible. Cela induit un morphisme de complexes

$$j : C_H \to C_G,$$

i.e. un carré commutatif de variétés semi-abéliennes :

$$\begin{array}{ccc} T_{H^{\mathrm{sc}}} & \longrightarrow & T_{G^{\mathrm{sc}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_H & \longrightarrow & \mathrm{SA}_G. \end{array}$$

On définit alors C_X comme le cône du morphisme de complexes $C_H \to C_G$, à savoir comme le complexe de longueur 3 suivant :

$$C_X := \mathrm{Cône}(C_H \to C_G) = [T_{H^{\mathrm{sc}}} \to T_H \oplus T_{G^{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{SA}_G]$$

formé de variétés semi-abéliennes. On peut alors définir un nouveau complexe $\widehat{C}''_X$ comme le dual de ce complexe dans la catégorie des complexes de 1-motifs, c'est-à-dire comme le complexe de 1-motifs suivant :

$$\widehat{C}''_X := \left[\mathrm{SA}_G^* \to \widehat{T_H} \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \to \widehat{T_{H^{\mathrm{sc}}}}\right]$$

(si S est une variété semi-abélienne, S^* est le 1-motif dual du 1-motif $[0 \to S]$ associé à S). En écrivant chacun des 1-motifs comme un complexe de longueur 2, $\widehat{C}''_X$ s'identifie au complexe de complexes suivant :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{T_{G^{\mathrm{lin}}}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{T_H} \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{T_{H^{\mathrm{sc}}}} \arrow[d] \\
(G^{\mathrm{ab}})^* \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On s'intéresse plus exactement aux sections sur $\bar{k}$ du cône de ce double complexe, à savoir au complexe de modules galoisiens :

$$\widehat{C}_X := \left[\widehat{T_{G^{\mathrm{lin}}}} \to \left(G^{\mathrm{ab}}\right)^*(\bar{k}) \oplus \widehat{T_H} \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \to \widehat{T_{H^{\mathrm{sc}}}}\right].$$

On introduit également une variante de ce complexe notée $\widehat{C}'_X$:

$$\widehat{C}'_X := \left[\widehat{T_{G^{\mathrm{lin}}}} \to \mathrm{Pic}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right) \oplus \widehat{T_H} \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \to \widehat{T_{H^{\mathrm{sc}}}}\right].$$

Montrons que ces complexes ne dépendent pas des tores maximaux choisis : notons $Z_{H,G}$ le sous-k-groupe algébrique de G/G^{u} engendré par $Z_{H^{\mathrm{red}}}$ et $Z_{G/G^{\mathrm{u}}}$. On note aussi $Z^{\mathrm{sc}}_{H,G}$ l'image réciproque de $Z_{H,G}$ dans G^{sc}. Alors les diagramme commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}
Z_{H^{\mathrm{sc}}} \arrow[r] \arrow[d] & T_{H^{\mathrm{sc}}} \arrow[d] \\
Z_{H^{\mathrm{red}}} \arrow[r] & T_H
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z^{\mathrm{sc}}_{H,G} \arrow[r] \arrow[d] & T^{\mathrm{sc}}_G \arrow[d] \\
Z_{H,G} \arrow[r] & \mathrm{SA}_G
\end{tikzcd}$$

définissent un quasi-isomorphisme naturel de complexes entre $[Z_{H^{\mathrm{sc}}} \to Z_{H^{\mathrm{red}}}]$ et $[T_{H^{\mathrm{sc}}} \to T_H]$ (resp. entre $[Z^{\mathrm{sc}}_{H,G} \to Z_{H,G}]$ et $[T_{G^{\mathrm{sc}}} \to T_G]$), d'où par dualité un quasi-isomorphisme canonique

$$\widehat{C}_X \xrightarrow{\mathrm{qis}} \left[\widehat{Z_{H,G^{\mathrm{lin}}}} \to \left(G^{\mathrm{ab}}\right)^*(\bar{k}) \oplus \widehat{Z_{H^{\mathrm{red}}}} \oplus \widehat{Z^{\mathrm{sc}}_{H,G}} \to \widehat{Z_{H^{\mathrm{sc}}}}\right] \tag{27}$$

(idem pour le complexe $\widehat{C}'_X$). Cela assure que les complexes $\widehat{C}_X$ et $\widehat{C}'_X$ ne dépendent pas des tores maximaux choisis : des choix différents de tores maximaux induisent des isomorphismes canoniques entre les complexes correspondants dans la catégorie dérivée.

En outre, les complexes $\widehat{C}_X$ et $\widehat{C}'_X$ ne dépendent pas de la décomposition de Levi choisie pour H : en effet, deux décompositions étant conjuguées par un unique élément de $H^{\mathrm{u}}(k)$, la conjugaison par cet élément induit des isomorphismes canoniques entre les complexes construits à l'aide de ces deux décompositions.

Remarquons enfin que l'on dispose d'un triangle exact canonique

$$\widehat{C}_X \to \widehat{C}'_X \to \mathrm{NS}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right)[-1] \to \widehat{C}_X[1].$$

Example 4.11.

- Si G est linéaire, on trouve le complexe de modules galoisiens de type fini :

$$\widehat{C}_X = [\widehat{T_G} \to \widehat{T_H} \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \to \widehat{T_{H^{\mathrm{sc}}}}].$$

- Si G^{ss} est simplement connexe, on a un quasi-isomorphisme naturel

$$\widehat{C}_X = \left[\widehat{G^{\mathrm{tor}}} \to \left(G^{\mathrm{ab}}\right)^*(\bar{k}) \oplus \widehat{T_H} \to \widehat{T_{H^{\mathrm{sc}}}}\right].$$

- Si G est linéaire et G^{ss} est simplement connexe, on obtient le complexe de modules galoisiens de type fini suivant : $\widehat{C}_X = [\widehat{G} \to \widehat{T_H} \to \widehat{T_{H^{\mathrm{sc}}}}]$.
- Si $H = 1$, i.e. $X = G$, on obtient le complexe $\widehat{C}_G = [\widehat{T_{G^{\mathrm{lin}}}} \to (G^{\mathrm{ab}})^*(\bar{k}) \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}}]$ qui, si G est linéaire, est exactement $[\widehat{T_G} \to \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}}] \cong \mathrm{UPic}(\overline{G})$ (voir [6, théorème 4.8]).
- Si G est semi-simple simplement connexe, on obtient $\widehat{C}_X := [0 \to \widehat{T_H} \to \widehat{T_{H^{\mathrm{sc}}}}]$, qui s'identifie à $\mathrm{UPic}(\overline{H})[-1]$.

Dans tous les cas, on remarque que les complexes $\widehat{C}_X$ et $\widehat{C}'_X$ s'intègrent naturellement dans les triangles exacts suivants :

$$\widehat{C}_X \to \widehat{C}_G \to \widehat{C}_H \to \widehat{C}_X[1],$$
$$\widehat{C}'_X \to \widehat{C}'_G \to \widehat{C}_H \to \widehat{C}'_X[1].$$

Remarquons que ce dernier triangle exact s'identifie, grâce au théorème 4.5, au triangle exact

$$\widehat{C}'_X \to \mathrm{UPic}(\overline{G}) \to \mathrm{UPic}(\overline{H}) \to \widehat{C}'_X[1].$$

On voit donc que $\widehat{C}'_X[1]$ est un cône du morphisme $\mathrm{UPic}(\overline{G}) \to \mathrm{UPic}(\overline{H})$.

Dans la suite, on va utiliser essentiellement la présentation suivante des complexes $\widehat{C}_X$ et $\widehat{C}'_X$ faisant intervenir le centre de H, à savoir le quasi-isomorphisme

$$\widehat{C}_X \xrightarrow{\mathrm{qis}} \left[\widehat{T_{G^{\mathrm{lin}}}} \to \left(G^{\mathrm{ab}}\right)^*(\bar{k}) \oplus \widehat{Z_{H^{\mathrm{red}}}} \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \to \widehat{Z_{H^{\mathrm{sc}}}}\right].$$

On souhaite relier le complexe $\widehat{C}_X$ au groupe de Brauer de X. Dans cette section, on considère la k-forme $Z \to X$ associée au torseur $G \to X$ défini par $x \in X(k)$, comme dans la section 3. Le point crucial est le théorème suivant :

Théorème 4.12. *Soit $X = G/H$, avec G connexe et H linéaire connexe. Il existe alors dans la catégorie dérivée un isomorphisme canonique*

$$\widehat{C}'_X \cong C_{\overline{G}/X}$$

et un triangle exact canonique

$$\widehat{C}_X \to C_{\overline{G}/X} \to \mathrm{NS}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right)[-1] \to \widehat{C}_X[1].$$

Démonstration. Fixons une décomposition de Levi de H, de sorte que $Z_{H^{\mathrm{red}}}$ est contenu dans le tore maximal T_G de G^{lin}. Posons $Z' := T_G/Z_{H^{\mathrm{red}}}$, $Z_1 := G/Z_{H^{\mathrm{red}}}$, $H' := H^{\mathrm{red}}/Z_{H^{\mathrm{red}}}$, $\widetilde{H} := \mathrm{Ker}(H \to H')$ et $Z := G/\widetilde{H}$. On dispose d'un morphisme naturel $Z_1 \to Z$ qui munit Z_1 d'une structure de Z-torseur sous H^{u}. On construit un diagramme commutatif analogue au diagramme (24), à savoir :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{T_G} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}}) \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \oplus \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}} \arrow[d, "="] \\
\widehat{T_G} \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}}) \oplus \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{G}^{\mathrm{lin}}) \oplus \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{Z'}) \arrow[r] & \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}} \\
\widehat{T_G} \arrow[r] \arrow[u, "="'] & \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{G}) \oplus \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{Z'}) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}} \arrow[u, "="'] \\
\widehat{T_G} \arrow[r] \arrow[u, "="'] & \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{Z_1}) \arrow[r] \arrow[u] & \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}} \arrow[u, "="'] \\
\widehat{T_G} \arrow[r] \arrow[u, "="'] & \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & \mathrm{Pic}(\overline{H'}) \arrow[u, "\cong"'] \\
\widehat{T_G} \oplus \bar{k}(Z)^*/\bar{k}^* \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & \mathrm{UPic}_{\overline{T_G}}(\overline{Z})^1 \arrow[r] \arrow[u, "\nu'"'] \arrow[d, "\mu"] & \mathrm{Pic}(\overline{H'}) \arrow[u, "="'] \arrow[d, "\cong"] \\
\bar{k}(Z)^*/\bar{k}^* \arrow[r] & \mathrm{Div}(\overline{Z}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}'(\overline{Z}/\overline{X}).
\end{tikzcd} \tag{28}$$

Le morphisme entre la première et la deuxième ligne est clairement un isomorphisme de complexes. Le morphisme entre la troisième et la deuxième est un isomorphisme de complexes par le lemme 4.7. Montrons que le morphisme entre les quatrième et troisième lignes est un isomorphisme. Il suffit de montrer que le morphisme central

$$\mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{Z_1}) \to \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{G}) \oplus \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}\big(\overline{Z'}\big)$$

est un isomorphisme.

Lemme 4.13. *Soient $H_1 \subset H_2 \subset G$ trois k-groupes. On suppose G connexe et H_2 linéaire connexe. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\mathrm{Pic}_{H_2}(G/H_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}_{H_2}(G) \oplus \mathrm{Pic}_{H_2}(H_2/H_1) \xleftarrow{\cong} \mathrm{Pic}(G/H_2) \oplus \mathrm{Pic}_{H_2}(H_2/H_1).$$

Démonstration. Notons $K := \mathrm{Ker}(\widehat{H_1} \to \mathrm{Pic}(G/H_1))$. On considère le diagramme commutatif exact suivant (voir notamment [22, proposition 5.1]) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \widehat{H_1}/U(G) \arrow[d, hook] & \\
U(G/H_2) \arrow[r, hook] \arrow[d, "="] & U(G/H_1) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{H_2} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}_{H_2}(G/H_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(G/H_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(H_2) \arrow[d, "="] \\
U(G/H_2) \arrow[r, hook] \arrow[d] & U(G) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \widehat{H_2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}_{H_2}(G) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(G) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(H_2) \\
0 & K & 0 & & & .
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent assure alors que l'on a une suite exacte canonique

$$0 \to K \to \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Pic}_{H_2}(G/H_1) \to \mathrm{Pic}_{H_2}(G)\big) \to \widehat{H_1}/U(G) \to 0$$

qui s'intègre dans le diagramme exact

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "="] & \widehat{H_1} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{H_1}/U(G) \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\mathrm{Pic}_{H_2}(G/H_1) \to \mathrm{Pic}_{H_2}(G)) \arrow[r] & \widehat{H_1}/U(G) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

où le morphisme central est la composée $\widehat{H_1} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}_{H_2}(H_2/H_1) \to \mathrm{Pic}_{H_2}(G/H_1)$. On vérifie facilement que le diagramme précédent est commutatif, et le lemme des 5 assure donc que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\widehat{H_1} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}_{H_2}(H_2/H_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Pic}_{H_2}(G/H_1) \to \mathrm{Pic}_{H_2}(G)\big).$$

Par conséquent, la suite naturelle

$$0 \to \mathrm{Pic}_{H_2}(H_2/H_1) \to \mathrm{Pic}_{H_2}(G/H_1) \to \mathrm{Pic}_{H_2}(G)$$

est exacte. Enfin, le morphisme $\mathrm{Pic}_{H_2}(G/H_1) \to \mathrm{Pic}_{H_2}(G)$ est scindé via

$$\mathrm{Pic}_{H_2}(G) \xleftarrow{\cong} \mathrm{Pic}(G/H_2) \hookrightarrow \mathrm{Pic}_{H_2}(G/H_1),$$

d'où le lemme. □

On applique alors ce lemme à $H_1 = Z_{H^{\mathrm{red}}}$ et $H_2 = T_G$ pour obtenir l'isomorphisme souhaité, et donc les complexes des lignes 3 et 4 du diagramme (28) sont isomorphes.

Poursuivons la preuve du théorème : il est clair que le morphisme entre les lignes 5 et 4 est un isomorphisme de complexes, puisque $\mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{Z}) \to \mathrm{Pic}_{\overline{T_G}}(\overline{Z_1})$ est un isomorphisme (car $Z_1 \to Z$ est un torseur sous un groupe unipotent).

Le morphisme entre les lignes 6 et 5 est un quasi-isomorphisme de complexes.

Montrons que le morphisme entre les lignes 6 et 7 est un quasi-isomorphisme : en degré 0, c'est immédiat. En degré 1, c'est clair en utilisant que $s : \mathrm{Pic}(\overline{H}') \to \mathrm{Pic}'(\overline{Z}/\overline{X})$ est injectif et en s'inspirant de la preuve du lemme 4.6. Pour le degré 2, cela résulte du fait que le morphisme canonique $s : \mathrm{Pic}(\overline{H}') \to \mathrm{Pic}'(\overline{Z}/\overline{X})$ est un isomorphisme grâce au corollaire 1.9.

Finalement, le diagramme (28) définit un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée

$$\widehat{C}'_X \xrightarrow{\cong} C_{\overline{G}/X},$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

Déduisons des théorèmes 2.1 et 4.12, le résultat suivant :

Théorème 4.14. *Soit $X = G/H$, avec G connexe, H linéaire connexe. Alors on a des isomorphismes, fonctoriels en H et G :*

$$\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_X) \xrightarrow{\cong} \mathbf{H}^0\big(k, \widehat{C}'_X\big) \xrightarrow{\cong} U(X),$$

$$\mathbf{H}^1\big(k, \widehat{C}'_X\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}(X), \qquad \mathbf{H}^2\big(k, \widehat{C}'_X\big) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Br}_a(X, G),$$

et une suite exacte fonctorielle :

$$0 \to \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}_X) \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{NS}\big(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\big)^{\Gamma_k} \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{C}_X) \to \mathrm{Br}_a(X, G) \to H^1\big(k, \mathrm{NS}\big(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\big)\big).$$

En particulier, si le groupe G est linéaire, on a trois isomorphismes

$$\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_X) \xrightarrow{\cong} U(X), \qquad \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}_X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}(X), \qquad \mathbf{H}^2(k, \widehat{C}_X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Br}_a(X, G).$$

Démonstration. Par le théorème 4.5, on dispose d'un isomorphisme $\widehat{C}'_X \cong C_{\overline{G}/X}$ et d'un triangle exact

$$\widehat{C}_X \to C_{\overline{G}/X} \to \mathrm{NS}\big(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\big)[-1] \to \widehat{C}_X[1].$$

On considère la suite exacte longue d'hypercohomologie associée à ce triangle, et le corollaire 3.3 assure alors le résultat, puisque $G(k) \neq \emptyset$. □

4.2. *Comparaison avec des résultats antérieurs*

On compare les résultats des théorèmes 4.8, 4.12 et 4.14 et des corollaires 4.9 et 4.10, avec des résultats antérieurs de Sansuc, Borovoi et Van Hamel, Harari et Szamuely.

On poursuit avec les mêmes notations que précédemment : X est un espace homogène d'un groupe connexe G sur un corps k de caractéristique nulle. On suppose les stabilisateurs géométriques $\overline{H}$ de X connexes.

4.2.1. *Cas où $\overline{H} = 1$*

On s'intéresse donc aux torseurs sous un groupe connexe G. Suivant le lemme 5.2.(iii) de [6], on dispose d'un quasi-isomorphisme canonique $\varphi : \mathrm{UPic}(\overline{X}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{UPic}(\overline{G})$.

On voit que le théorème 4.8 et ses corollaires généralisent les résultats de Sansuc (voir [28, section 6]) qui donnent des formules pour $U(X)$, $\mathrm{Pic}(X)$ et $\mathrm{Br}_a(X)$ quand G est un k-tore ou un k-groupe semi-simple.

Plus récemment, citons les travaux de Harari et Szamuely (voir [20, section 4]) qui obtiennent une formule pour $\mathrm{Br}_a(X)$ dans le cas où G est une variété semi-abélienne. Plus exactement, sous l'hypothèse $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$, les auteurs construisent un morphisme canonique

$$\mathbf{H}^1\big(k, G^*\big) \to \mathrm{Br}_a(X),$$

qui est compatible en un certain sens avec l'accouplement de Brauer–Manin (voir la fin de la section 6 de [20]). Sous la même hypothèse $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$, on étend et on précise ici cette construction pour un espace principal homogène X sous un groupe connexe G quelconque avec le théorème 4.5 qui fournit une suite exacte

$$\mathrm{NS}\big(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\big)^{\Gamma_k} \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{C}_G) \xrightarrow{a} \mathrm{Br}_a(X) \to H^1\big(k, \mathrm{NS}\big(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\big)\big).$$

En effet, par construction, si G est une variété semi-abélienne, on a un quasi-isomorphisme naturel $G^*(\bar{k}) \cong \widehat{C}_G[1]$ (avec les conventions de [20] pour le 1-motif G^*).

Enfin, Borovoi et van Hamel obtiennent dans [6] des formules dans le cas où G est linéaire connexe quelconque. Plus précisément, ils montrent par exemple que l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Br}_a(X) \cong \mathbf{H}^2\big(k, \big[\widehat{T}_G \to \widehat{T}_G^{\mathrm{sc}}\big]\big),$$

sous l'hypothèse $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$. On retrouve ici ce résultat comme cas particulier du théorème 4.8.

4.2.2. Cas où G est linéaire

Dans ce cas, le résultat principal est dû à Borovoi et van Hamel (voir [5, corollaire 3.2] et [7, théorème 7.2]) : il décrit le groupe de Brauer algébrique de X. Plus précisément, les auteurs montrent (sans hypothèse de connexité pour les stabilisateurs) l'existence d'un morphisme injectif canonique

$$\mathrm{Br}_a(X) \to \mathbf{H}^2\big(k, [\widehat{G} \to \widehat{\overline{H}}]\big)$$

qui est un isomorphisme si $X(k) \neq \emptyset$ ou $H^3(k, \mathbf{G}_m) = 0$. On peut retrouver ce résultat, si $\overline{H}$ est connexe, à partir du corollaire 4.10, en calculant les éléments algébriques dans $\mathbf{H}^2(k, \widehat{\overline{C}}_X)$.

Remarque 4.15. Notons que tous ces résultats antérieurs se limitent à décrire le groupe de Brauer *algébrique* $\mathrm{Br}_a(X)$ de l'espace homogène X. Dans le présent texte, on considère le groupe $\mathrm{Br}_a(X, G)$, contenant $\mathrm{Br}_a(X)$, mais qui peut contenir des éléments transcendants.

4.3. Lien avec le complexe $\mathrm{UPic}(\overline{X})$ *: groupe de Brauer algébrique*

On relie ici les résultats obtenus aux sections précédentes à ceux de Borovoi et van Hamel dans [5–7], qui traitent du groupe de Brauer algébrique.

Dans cette section, H est un groupe algébrique linéaire connexe, X est une k-variété lisse géométriquement intègre et $\pi : Y \xrightarrow{H} X$ est un torseur sous H.

On dispose comme plus haut d'un diagramme commutatif de torseurs :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "H^{\mathrm{u}}"] \arrow[ddr, "H"'] & Z' \arrow[dd, "H^{\mathrm{red}}"] \arrow[dr, "Z_{H^{\mathrm{red}}}"] & \\
 & & Z \arrow[dl, "H'"] \\
 & X & .
\end{tikzcd}$$

On vérifie alors facilement que le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bar{k}(X)^*/\bar{k}^* \arrow[r] \arrow[d, "p^*"] & \mathrm{Div}(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d, "p^*"] & 0 \arrow[d] \\
\bar{k}(Z)^*/\bar{k}^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Div}(\overline{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(\overline{H'}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{H'})/\,\mathrm{Pic}(\overline{Z})
\end{tikzcd}$$

induit un triangle exact

$$\mathrm{UPic}(\overline{X}) \to C_{\overline{Y}/X} \to \mathrm{Pic}\big(\overline{H'}\big)/\,\mathrm{Pic}(\overline{Z})[-2] \to \mathrm{UPic}(\overline{X})[1].$$

Enfin, considérons le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}(\overline{Z}) \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(\overline{H'}) \arrow[r, "\Delta_{Z/X}"] \arrow[d] & \mathrm{Br}(\overline{X}) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Br}(\overline{Z}) \arrow[d] \\
& \mathrm{Pic}(\overline{X}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\overline{Y}) \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{Pic}(\overline{H}) \arrow[r, "\Delta_{Y/X}"] & \mathrm{Br}(\overline{X}) \arrow[r] & \mathrm{Br}(\overline{Y}).
\end{tikzcd} \tag{29}$$

Puisque $\mathrm{Pic}(\overline{H'}) \to \mathrm{Pic}(\overline{H})$ est surjectif (cf. lemme 2.4), une chasse au diagramme assure que (29) induit un isomorphisme

$$\mathrm{Pic}\big(\overline{H'}\big)/\,\mathrm{Pic}(\overline{Z}) \cong \mathrm{Pic}(\overline{H})/\,\mathrm{Pic}(\overline{Y}) \cong \mathrm{Ker}\big(\mathrm{Br}(\overline{X}) \to \mathrm{Br}(\overline{Y})\big).$$

Finalement, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 4.16. *Soit H un k-groupe linéaire connexe, X une k-variété lisse géométriquement intègre et $\pi : Y \xrightarrow{H} X$ un torseur sous H. On a alors un triangle exact canonique*

$$\mathrm{UPic}(\overline{X}) \to C_{\overline{Y}/X} \to \big(\mathrm{Pic}(\overline{H})/\,\mathrm{Pic}(\overline{Y})\big)[-2] \to \mathrm{UPic}(\overline{X})[1]$$

où $(\mathrm{Pic}(\overline{H})/\,\mathrm{Pic}(\overline{Y})) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Br}(\overline{X}) \to \mathrm{Br}(\overline{Y}))$.

En particulier, la suite exacte longue associée à ce triangle exact induit la suite exacte :

$$0 \to \mathbf{H}^2\big(k, \mathrm{UPic}(\overline{X})\big) \to \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}) \to \mathrm{Br}(\overline{X})^{\Gamma_k}.$$

Alors le théorème 2.1 et la proposition 2.19 de [6] assurent que cette suite exacte s'intègre dans le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Br}_a(X) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Br}_a(X, Y) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Br}(\overline{X})^{\Gamma_k} \arrow[d, "="] \\
0 \arrow[r] & \mathbf{H}^2(k, \mathrm{UPic}(\overline{X})) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^2(k, C_{\overline{Y}/X}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Br}(\overline{X})^{\Gamma_k} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & N^3(k, \mathbf{G}_m) \arrow[r, "="] & N^3(k, \mathbf{G}_m) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

qui illustre le lien entre le théorème 2.1 (deuxième colonne) et le résultat de Borovoi et van Hamel (première colonne).

Considérons également le cas des espaces homogènes : soit d'abord G un k-groupe algébrique *linéaire* connexe, tel que $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$, et X un espace homogène de G à stabilisateurs géométriques $\overline{H}$ connexes. On a introduit plus haut le complexe

$$\widehat{\widehat{C}}_X := [\widehat{G} \to \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}} \to \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}}]$$

et on peut également le comparer au complexe $\mathrm{UPic}(\overline{X})$. En effet, par le théorème 3.1 de [5] (théorème 5.8 de [7]), on a un isomorphisme naturel dans la catégorie dérivée :

$$\mathrm{UPic}(\overline{X}) \cong [\widehat{G} \to \widehat{\overline{H}}],$$

dont on déduit aisément la proposition suivante :

Proposition 4.17. *Soit G un k-groupe algébrique linéaire connexe, tel que G^{ss} soit simplement connexe* (*i.e.* $\mathrm{Pic}(\overline{G}) = 0$)*, et X un espace homogène de G à stabilisateurs géométriques $\overline{H}$ connexes. On a un triangle exact canonique dans la catégorie dérivée*

$$\mathrm{UPic}(\overline{X}) \to \widehat{\widehat{C}}_X \to \mathrm{Pic}(\overline{H})[-2] \to \mathrm{UPic}(\overline{X})[1].$$

Considérons pour finir le complexe $\mathrm{UPic}(\overline{X})$, pour un espace homogène X d'un groupe G connexe non nécessairement linéaire, à stabilisateurs linéaires (pas forcément connexes). Si $X(k) \neq \emptyset$, alors on a un isomorphisme $X \cong G/H$. Comme plus haut, on peut supposer G^{ss} simplement connexe. Le résultat suivant étend le résultat de Borovoi et van Hamel (théorème 3.1 de [5] et théorème 5.8 de [7]) au cas non linéaire :

Proposition 4.18. *Soit $X = G/H$ un espace homogène d'un groupe connexe G, avec G^{ss} simplement connexe et H linéaire* (*pas forcément connexe*)*. On dispose alors d'un isomorphisme canonique dans la catégorie dérivée* :

$$\mathrm{UPic}(\overline{X}) \cong \big[\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \to \mathrm{Pic}\big(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\big) \oplus \widehat{H}\big].$$

Démonstration. Notons $X^{\mathrm{lin}} := G^{\mathrm{lin}}/H$. Alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Pic}(\overline{G}^{\mathrm{ab}}) \oplus \widehat{H} \arrow[d, "\cong"] \\
\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \arrow[r] & \mathrm{Pic}_{\overline{G}^{\mathrm{lin}}}(\overline{G}) \oplus \mathrm{Pic}_{\overline{G}^{\mathrm{lin}}}(\overline{X}^{\mathrm{lin}}) \\
\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \arrow[r] \arrow[u, "="] & \mathrm{Pic}_{\overline{G}^{\mathrm{lin}}}(\overline{X}) \arrow[u, "\cong"'] \\
\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \oplus \bar{k}(X)^*/\bar{k}^* \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathrm{UPic}_{\overline{G}^{\mathrm{lin}}}(\overline{X})^1 \arrow[u] \arrow[d] \\
\bar{k}(X)^*/\bar{k}^* \arrow[r] & \mathrm{Div}(\overline{X})
\end{tikzcd}$$

réalise un isomorphisme dans la catégorie dérivée (voir lemme 4.13)

$$\left[\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \to \mathrm{Pic}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right) \oplus \widehat{H}\right] \cong \mathrm{UPic}(\overline{X}). \qquad \square$$

Donc le théorème 4.5 assure que le triangle exact de la proposition 4.16

$$\mathrm{UPic}(\overline{X}) \to C_{\overline{G}/X} \to \mathrm{Pic}(\overline{H})[-2] \to \mathrm{UPic}(\overline{X})[1]$$

est représentable par le triangle exact évident de complexes

$$\left[\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \to \mathrm{Pic}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right) \oplus \widehat{H}\right] \to \left[\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \to \mathrm{Pic}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right) \oplus \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{red}}}} \to \widehat{Z_{\overline{H}^{\mathrm{sc}}}}\right]$$
$$\to \widehat{\mu_H}(\bar{k})[-2] \to \left[\widehat{G^{\mathrm{lin}}} \to \mathrm{Pic}\left(\overline{G}^{\mathrm{ab}}\right) \oplus \widehat{H}\right][1].$$

Remerciements

Je remercie chaleureusement Mikhail Borovoi, Jean-Louis Colliot-Thélène et David Harari pour leurs précieux commentaires sur cet article. Je remercie également le rapporteur pour ses remarques et commentaires.

Références

[1] M. Borovoi, Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology, Duke Math. J. 72 (1993) 217–239.
[2] M. Borovoi, Abelian Galois cohomology of reductive groups, Mem. Amer. Math. Soc. 132 (1998), viii+50.
[3] M. Borovoi, J.L. Colliot-Thélène, A.N. Skorobogatov, The elementary obstruction and homogeneous spaces, Duke Math. J. 141 (2008) 321–364.
[4] M. Borovoi, C. Demarche, Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces, Comment. Math. Helv. (2010), À paraître.
[5] M. Borovoi, J. van Hamel, Extended Picard complexes for algebraic groups and homogeneous spaces, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342 (2006) 671–674.
[6] M. Borovoi, J. van Hamel, Extended Picard complexes and linear algebraic groups, J. Reine Angew. Math. 627 (2009) 53–82.
[7] M. Borovoi, J. van Hamel, Extended equivariant Picard complexes and homogeneous spaces, 2010, prépublication, disponible sur http://arxiv.org/abs/1010.3414.
[8] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, Néron Models, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
[9] H. Cartan, S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956.
[10] C. Chevalley, Une démonstration d'un théorème sur les groupes algébriques, J. Math. Pures Appl. (9) 39 (1960) 307–317.

[11] J.L. Colliot-Thélène, B.È. Kunyavskiĭ, Groupe de Picard et groupe de Brauer des compactifications lisses d'espaces homogènes, J. Algebraic Geom. 15 (2006) 733–752.
[12] J.L. Colliot-Thélène, J.J. Sansuc, La descente sur les variétés rationnelles. II, Duke Math. J. 54 (1987) 375–492.
[13] J.L. Colliot-Thélène, F. Xu, Brauer–Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms, Compos. Math. 145 (2009) 309–363, Avec un appendice par Dasheng Wei et Fei Xu.
[14] B. Conrad, A modern proof of Chevalley's theorem on algebraic groups, J. Ramanujan Math. Soc. 17 (2002) 1–18.
[15] J.C. Douai, Sur la 2-cohomologie galoisienne de la composante résiduellement neutre des groupes réductifs connexes définis sur les corps locaux, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342 (2006) 813–818.
[16] R. Fossum, B. Iversen, On Picard groups of algebraic fibre spaces, J. Pure Appl. Algebra 3 (1973) 269–280.
[17] J. Giraud, Cohomologie non abélienne, Grundlehren Math. Wiss., Band 179, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[18] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer. I, II et III, in : Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–188.
[19] D. Harari, A.N. Skorobogatov, Non-abelian cohomology and rational points, Compos. Math. 130 (2002) 241–273.
[20] D. Harari, T. Szamuely, Local-global principles for 1-motives, Duke Math. J. 143 (2008) 531–557.
[21] F. Knop, H. Kraft, D. Luna, T. Vust, Local properties of algebraic group actions, in: Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, in: DMV Semin., vol. 13, Birkhäuser, Basel, 1989, pp. 63–75.
[22] F. Knop, H. Kraft, T. Vust, The Picard group of a G-variety, in: Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie, in: DMV Semin., vol. 13, Birkhäuser, Basel, 1989, pp. 77–88.
[23] R.E. Kottwitz, Stable trace formula: cuspidal tempered terms, Duke Math. J. 51 (1984) 611–650.
[24] J.S. Milne, Étale Cohomology, Princet. Math. Ser., vol. 33, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980.
[25] V.L. Popov, Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one-dimensional homogeneous vector fiberings, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 38 (1974) 294–322.
[26] M. Raynaud, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, Lecture Notes in Math., vol. 119, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
[27] M. Rosenlicht, Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. Math. 78 (1956) 401–443.
[28] JJ. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres, J. Reine Angew. Math. 327 (1981) 12–80.
[29] C.A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.